Un aperçu de méthodes de démonstration (parmi bien d'autres)(*Les parties en italiques ne sont que des ébauches de démonstrations ; il conviendrait de développer*).

1. **Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment** :
   Soit f une fonction continue par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   On notera $ESC_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.
   Soit la propriété :
   $$\text{Il existe } \varphi \in ESC_{[a,b]} \text{tel que } \|f-\varphi\|_\infty^{[a,b]} \leq \varepsilon. \qquad (P_{[a,b]})$$
   On va prouver par l'absurde que $(P_{[0,1]})$: supposons que $(P_{[0,1]})$ est faux.
   (a) **Si $(P_{[0,1/2]})$ et $(P_{[1/2,1]})$ sont vrais, alors $(P_{[0,1]})$ est vrai** :
   On fabrique $\varphi \in ESC_{[0,1]}$ en utilisant $\varphi_1 \in ESC_{[0,1/2]}$ et $\varphi_2 \in ESC_{[1/2,1]}$.

   (b) **On construit deux suites adjacentes $(a_n), (b_n)$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ (P_{[a_n,b_n]})$ est faux** :
   C'est une définition par récurrence :
   Initialisation : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
   Pour $n \geq 1$: $(P_{[a_{n-1},b_{n-1}]})$ est faux donc, d'après a-, en choisissant pour $[a_n, b_n]$ l'une des moitiés de $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, $(P_{[a_n,b_n]})$ est faux.
   De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = 1/2^n$.
   (c) **L'existence de $c = \lim a_n = \lim b_n$ conduit à une absurdité** :
   f admet une limite l_g en c à gauche et une limite l_d en c à droite.
   Soit $\alpha > 0$ et φ définie sur $[c-\alpha, c+\alpha]$ par :
   $$\forall t \in [c-\alpha, c[,\ \varphi(t) = l_g, \quad \varphi(c) = f(c), \quad \forall t \in]c, c+\alpha],\ \varphi(t) = l_d.$$
   On peut choisir c pour que $\|f-\varphi\|_\infty^{[c-\alpha,c+\alpha]} \leq \varepsilon$ puis n pour que $[a_n, b_n] \subset [c-\alpha, c+\alpha]$ ce qui prouve que $(P_{[a_n,b_n]})$ est vrai, ce qui est absurde

2. **Un lemme : Toute fonction continue d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est "uniformément continue" sur $[a,b]$** :
   ie :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (t_1,t_2) \in [a,b]^2,\ |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon.$$
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et la propriété $\exists \alpha > 0,\ \forall (t_1,t_2) \in [a,b]^2,\ |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon \quad P'_{[a,b]})$.
   Comme au 1-, on peut prouver par l'absurde que $(P_{[0,1]})$ en procédant par "dichotomie".

   Un corollaire : Toute fonction continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est "uniformément continue" sur $\mathbb{R}$.

3. **Théorème de Weierstrass pour une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$:**
Soit f une fonction continue et $2\pi-$périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
On cherche une suite (P_n) telle que $\lim \|f-P_n\|_\infty^{\mathbb{R}} (= \lim \|f-P_n\|_\infty^{[-\pi,\pi]}) = 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n soit un polynôme trigonométrique.
On note $Q_n(x) = \dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}(1+\cos x)^n$ et
$$\boldsymbol{P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)Q_n(t)\ \mathrm{d}t.}$$
Idée : Si n est "grand",
– $Q_n(t)$ est "minuscule" dès que $t \neq 0$ (cf d-) donc $P_n(x)$ est "proche" de $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-c}^{c} f(x-t)Q_n(t)\ \mathrm{d}t$ pour un c "faible",
– a_n est "proche de $b_n = \dfrac{1}{2\pi}f(x)\displaystyle\int_{-c}^{c} Q_n(t)\ \mathrm{d}t$ (cf la "continuité uniforme" des fonctions continues périodiques)
– b_n est "proche" de $f(x)$ (car $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-c}^{c} Q_n(t)\ \mathrm{d}t$ est proche de $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$ d'après d-).

   (a) $\boldsymbol{P_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q_n(x-t)\ \mathrm{d}t}$:
   Par changement de variable et en utilisant les périodicités.
   (b) **P_n est un polynôme trigonométrique :**
   On développe $\cos(x-t)$.
   (c) **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$:**
   On trouve une intégrale de Wallis par changement de variable $t = 2\theta$
   (d) **Si $c > 0$, alors (Q_n) est de limite nulle pour $\|.\|_\infty^{[c,\pi]}$:**
   On étudie les variations de Q_n.

4. **Théorème de Weierstrass pour une fonction continue sur un segment** :
Soit f une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{C}$.
On cherche une suite (Q_n) telle que $\lim \|f-Q_n\|_\infty^{[-1,1]} = 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n soit un polynôme.

On se ramène au thm précédent :
   (a) **$\forall x \in [-1,1],\ \exists u \in [0,\pi], f(x) = f(\cos u).$** :
   $u = \arccos x$
   (b) **$f \circ \cos = g$ est continue et $2\pi-$périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:**
   On peut donc trouver une suite (P_n) telle que $\lim \|f-P_n\|_\infty^{[-\pi,\pi]} = 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n soit un polynôme trigonométrique : $P_n(u) = \displaystyle\sum_{k=-d_n}^{d_n} c_{n,k}\exp(iku)$.
   (c) **$\dfrac{1}{2}(P_n(-u)+P_n(u))$ est de la forme $Q_n(\cos(u))$:**
   $\dfrac{1}{2}(P_n(-u)+P_n(u)) = \displaystyle\sum_{k=-d_n}^{d_n} c_{n,k}\cos(ku)$ *et* $\cos(ku)$ *est un polynôme en* $\cos u$.
   (d) **$\|f-Q_n\|_\infty^{[-1,1]} \leq \|g-P_n\|_\infty^{[-\pi,\pi]}$** :
   $\forall x \in [-1,1],\ |f(x)-Q_n(x)| = \dfrac{1}{2}|(g(-u)-P_n(-u))+(g(u)-P_n(u))|$, *parce que* g *est paire, et on cherche un majorant.*