Dans tout ce qui suit, (YT) signifie : "Pour comprendre mathématiquement ce qui précède, voir (dans quelques semaines) le cours de Y.Tastet".

1. Une quadrique peut se définir par une "équation implicite" (YT) de la forme

$$^{t}XQX + LX = k,$$

– $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées d'un point de l'espace euclidien dans un ROND,
– $Q = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique réelle non nulle (donc de rang 1 ou 2 ou 3),
– $L = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}$ et k est un réel.
Sous forme développée :

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz = k,$$

– $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ est la "partie quadratique" de l'"expression" (au sens Maple) $E = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz - k$.
La partie quadratique comporte 3 termes carrés (ax^2, by^2, cz^2) et 3 termes rectangles $(2dxy, 2exz, 2fyz)$; attention aux facteurs "2" dans ces derniers.
– $gx + hy + iz$ est la "partie linéaire" (ou $gx + hy + iz - k$ la "partie affine").
En Maple, on commence par :

$$> E := a * x^2 + ...; Q := Matrix(...);$$

2. La plupart des quadriques ont un centre.
Ce centre C existe et est unique si et seulement si Q est inversible et il est la solution (xc, yc, zc) de l'équation $\overrightarrow{grad}(F)(x, y, z) = \overrightarrow{0}$ (YT).

$$E1 := subs(\{x = xc + x1, y = yc + y1, z = zc + z1\}, E);$$

donne une équation implicite dans le repère translaté d'origine C et la partie linéaire "disparait".

3. Pour obtenir une équation réduite de la quadrique, on diagonalise Q par une matrice de passage orthogonale ie on passe dans un autre ROND $(C, x2, y2, z2)$ (cf *Eigenvectors* et *GramSchmidt*).
On peut ainsi obtenir la "classification des quadriques" (YT) dont voici un résumé :
Soit $\{\lambda 1, \lambda 2\, \lambda 3\} = \mathrm{sp}(Q)$.
   (a) $\mathrm{rg}Q = 3$ et $\lambda 1, \lambda 2, \lambda 3$ sont de même signe :
   $\dfrac{x2^2}{a^2} + \dfrac{y2^2}{b^2} + \dfrac{z2^2}{c^2} = 0$ (un point) ou 1 (un ellipsoïde) ou $-1\,(\emptyset)$,
   (b) $\mathrm{rg}Q = 3$ et $\lambda 1, \lambda 2$ sont de même signe, $\lambda 3$ du signe opposé :
   $\dfrac{x2^2}{a^2} + \dfrac{y2^2}{b^2} - \dfrac{z2^2}{c^2} = 0$ (un cône) ou 1 (un hyperboloïde à une nappe ou H1) ou -1 (un hyperboloïde à deux nappes ou H2),
   (c) $\mathrm{rg}Q = 2$, (ie $\lambda 3 = 0$) et $\lambda 1, \lambda 2$ sont de même signe :
   $\dfrac{x2^2}{a^2} + \dfrac{y2^2}{b^2} = 2p\, z2$, $p \neq 0$ (un paraboloïde elliptique) ou 0 (une droite) ou 1 (un cylindre elliptique) ou $-1\,(\emptyset)$,
   (d) $\mathrm{rg}Q = 2$, (ie $\lambda 3 = 0$) et $\lambda 1, \lambda 2$ sont de signes opposés :
   $\dfrac{x2^2}{a^2} - \dfrac{y2^2}{b^2} = 2p\, z2$, $p \neq 0$ (un paraboloïde hyperbolique ou PH) ou 0 (le réunion de deux plans) ou 1 (un cylindre hyperbolique),
   (e) $\mathrm{rg}Q = 1$, (ie $\lambda 2 = \lambda 3 = 0$) :
   $x2^2 = 2p\, y2$ (un cylindre parabolique si $p \neq 0$, un plan sinon),

... où a, b, c ne sont pas ceux de l'expression E, mais des $1/2-$axes ...

4. Une quadrique est de révolution si et seulement si c'est un plan (cf e)) ou bien Q admet une valeur propre non nulle d'ordre au moins 2 [Cas a),b),c) lorsque $a = b$ ie $\lambda 1 = \lambda 2 \neq 0$].
Q admet λ pour valeur propre double ssi la matrice $Q - \lambda Id$ est de rang 1.
Sur une quadrique de révolution, il est facile de calculer des aires (YT).
Beaucoup de quadriques sont, "à une affinité près", de révolution [Cas a),b),c) : $(x3, y3, z3) = (x2, \frac{a}{b}y2, z2)$].
Le volume d'une boule de rayon a est $\frac{4}{3}\pi a^3$ et par affinités, le volume intérieur à l'ellipsoïde est $\frac{4}{3}\pi abc$.

5. Par chaque point d'un H1 passent deux droites situées sur la surface (des génératrices) :

$$\frac{x2^2}{a^2} + \frac{y2^2}{b^2} - \frac{z2^2}{c^2} = 1 \iff \left(\frac{x2^2}{a^2} - 1\right) - \left(\frac{z2^2}{c^2} - \frac{y2^2}{b^2}\right) = 0 \iff \begin{vmatrix} \frac{x2}{a} - 1 & \frac{z2}{c} - \frac{y2}{b} \\ \frac{z2}{c} + \frac{y2}{b} & \frac{x2}{a} + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Un point $M = (x2, y2, z2)$ est sur la quadrique ssi

$$\begin{pmatrix} \frac{x2}{a} - 1 \\ \frac{z2}{c} + \frac{y2}{b} \end{pmatrix} = 0 \text{ ou } \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \frac{z2}{c} - \frac{y2}{b} \\ \frac{x2}{a} + 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{x2}{a} - 1 \\ \frac{z2}{c} + \frac{y2}{b} \end{pmatrix},$$

en regardant le déterminant par colonnes, ie ssi M est sur l'une des droites :

$$D_\infty : \begin{cases} x2 = a \\ \frac{z2}{c} + \frac{y2}{b} = 0 \end{cases} \text{ ou } D_t : \begin{cases} \frac{z2}{c} - \frac{y2}{b} = t\left(\frac{x2}{a} - 1\right) \\ \frac{x2}{a} + 1 = t\left(\frac{z2}{c} + \frac{y2}{b}\right) \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

ou bien, en regardant le déterminant par lignes, ssi M est sur l'une des droites :

$$\Delta_\infty : \begin{cases} x2 = a \\ \frac{z2}{c} - \frac{y2}{b} = 0 \end{cases} \text{ ou } \Delta_t : \begin{cases} \frac{z2}{c} + \frac{y2}{b} = t\left(\frac{x2}{a} - 1\right) \\ \frac{x2}{a} + 1 = t\left(\frac{z2}{c} - \frac{y2}{b}\right) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Pour représenter ces droites, le plus simple est de chercher 2 points sur chaque droite.
Par exemple, pour représenter $D_{-50}, D_{-40}, D_{-30}, ..., D_0, ...D_{30}, D_{40}, D_{50}$:

```
> p1 := t-> [3*a, b*(2/t-t), c*(2/t+t)];
> p2 := t-> [-3*a, -b*(1/t-2*t), -c*(1/t+2*t)];
> spacecurve([seq([p1(10*t), p2(10*t)], t=-5..5)]);
```

On peut, de même dessiner une double famille de génératrices sur un PH en écrivant une équation de la surface sous la forme :

$$\begin{vmatrix} \frac{x2}{a} - \frac{y2}{b} & 1 \\ 2p\, z2 & \frac{x2}{a} + \frac{y2}{b} \end{vmatrix} = 0.$$