A - Convergence pour $\|.\|_2$

Thm : Soit $f \in CM_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et s_n la somme partielle d'ordre n de sa série de Fourier. La suite (s_n) converge vers f pour $\| \quad \|_2$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - s_n\|_2 = 0$$

Corollaire 1 (Thm de Parseval) : $\|f\|_2 = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} (\|u_n\|_2)^2\right)^{1/2} = \lim_{n\to+\infty} \|s_n\|_2$.

Application : $\left(\frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{|a_0|^2}{4} + \sum_1^{\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}\right)^{1/2}$

Corollaire 2 : $f \in \mathcal{D} \mapsto (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ **est injective.**
(mais $f \in CM_T \mapsto (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ n'est pas injective)

DEM du théorème :

1. Cas des fonctions continues : D'après le thm de Weierstrass (2ème), on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P \in \mathcal{P}_T, \quad \|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque fixé et P associé à ε ; on a alors $\|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$.
Soit n_0 tel que $P \in E_{n_0}$, où $E_n = Vect(\exp(ik\omega))_{-n\leq k\leq n}$; on a alors $\forall n \geq n_0, \quad P \in E_n$.
s_n est le projeté orthogonal de f sur E_n donc $\|f - s_n\|_2 \leq \|f - P\|_2$ d'où :

$$\forall n \geq n_0, \quad \|f - s_n\|_2 \leq \|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$$

2. Cas des fonctions continues par morceaux : Démontrons que, si $x_1, x_2, ..., x_k$ sont les points de discontinuité de f sur $[0, T[$, il existe $g \in CM_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que :

$$\|f - g\|_2 \leq \varepsilon \text{ et les points de discontinuité de g sont } x_2, ..., x_k$$

Par récurrence, on passera ainsi à une fonction h n'ayant plus aucune discontinuité et telle que $\|f-h\|_2 \leq k\varepsilon$.
Construction de g :
Soit α tel que : $(x_1 - \alpha > x_k - T;\ x_1 + \alpha < x_2;\ 2\alpha(\|f\|_\infty)^2 \leq T\varepsilon^2)$, ie α est assez faible pour que le segment $[x_1 - \alpha, x - 1 + \alpha]$ soit entre les discontinuités situées à gauche $(x_k - T$)et à droite (x_2) de x_1 et très faible par rapport à l'"amplitude" des variations de f.
Soit g affine sur $[x_1 - \alpha, x_1 + \alpha] \quad (mod\ T)$ et coïncidant avec f ailleurs (ie on remplace la discontinuité par un "segment oblique").

$s_n(f) - s_n(g) = p_{E_n}^{\perp}(f - g)$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|s_n(f) - s_n(g)\|_2 \leq \|f - g\|_2$.
De plus $\|f - g\|_2 = \left(\frac{1}{T}\int_{x_1-\alpha}^{x_1+\alpha} |f - g|^2\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{T} 2\alpha\|f\|_\infty^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon$
d'où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|s_n(f) - s_n(g)\|_2 \leq \|f - g\|_2 \leq \varepsilon$.
Par inégalité triangulaire et avec la récurrence,
$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|s_n(f) - s_n(h)\|_2 \leq \|f - h\|_2 \leq k\varepsilon$ d'où, en appliquant 1. à h qui est continue :

$$\exists n_0, \quad \forall n \geq n_0, \quad \|f - s_n(f)\|_2 \leq \|f - h\|_2 + \|h - s_n(h)\|_2 + \|s_n(h) - s_n(f)\|_2 \leq (2k + 1)\varepsilon$$

Corollaire 2 : $(\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = 0) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \|s_n\|_2 = 0) \Rightarrow (\|f\|_2 = 0) \Rightarrow (f = 0)$.
(parce que, sur $\mathcal{D}$, $\| \quad \|_2$ est une norme). *MED*

B - Convergence simple

Thm : Soit $f \in CM_T^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et s_n la somme partielle d'ordre n de sa série de Fourier. La suite (s_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée $\tilde{f}$ de f
DEM

1. Propriétés du "noyau de Dirichlet" $D_n : t \mapsto 1/2 + \sum_1^n \cos(kt)$:

$D_n(t) = \frac{\sin(n + 1/2)t}{2\sin(t/2)}$ si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(t) = n + 1/2$ si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\int_0^\pi D_n = \pi/2$.

2. Calcul de s_n en fonction de D_n :
   $s_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\ \mathrm{d}t$ (produit de convolution)
   De plus : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\ \mathrm{d}t$.
   Conclusion : $s_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} [f(x+t)+f(x-t)]\ D_n(t)\ \mathrm{d}t$.
3. Utilisation du lemme de Lebesgue :
   Soit $h(t) = \dfrac{f(x+t)-\lim_{x+} f}{2\sin(t/2)} + \dfrac{f(x-t)-\lim_{x-} f}{2\sin(t/2)}$ sur $]0,\pi]$ et $h(0)\in\mathbb{C}$ quelconque.
   Alors : $s_n(x) - \tilde{f}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(n+1/2)t\ .\ h(t)\ \mathrm{d}t$.
   h a une limite en 0^+ (f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux) donc elle est continue par morceaux sur $[0,\pi]$ et le lemme de Lebesgue s'applique.

MED

C - Convergence normale

Remarque : Si $\sum u_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, nécessairement f est continue sur $\mathbb{R}$. (puisque $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$)

Thm : Soit $f\in CM_T^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et f continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\sum u_n$ sa série de Fourier.
La série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est la fonction f.

Remarque : Les séries $\sum c_n,\ \sum c_{-n},\ \sum a_n,\ \sum b_n$ sont alors absolument convergentes.
DEM

1. $\sum c_n(f)$ est absolument convergente :
   $\forall n>0,\quad c_n(f) = \dfrac{1}{in}c_n(f')$ et : $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad 2ab\le a^2+b^2$
   donc : $\forall n>0,\quad |c_n(f)|\le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2}+|c_n(f')|^2\right)$ et on sait que $\sum |c_n(f')|^2$ est convergente d'où la convergence par majoration. Idem pour $\sum c_{-n}(f)$
2. $\forall n>0,\quad \|u_n(f)\|_\infty \le |c_n(f)|+|c_{-n}(f)|$ d'où la convergence normale.

MED

Complément : preuve du lemme de Lebesgue

Lemme : Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f\in CM([a,b],\mathbb{C})$. $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\ \mathrm{d}t = 0$.

Corollaires : Le même avec cos ou sin. *DEM*

1. Si f est en escalier, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\ \mathrm{d}t = \sum_0^{p-1}\int_{]a_k,a_{k+1}[} c_k e^{i\lambda t}\ \mathrm{d}t$ d'où le résultat.
2. Soit $f\in CM([a,b],\mathbb{C})$ et $\varepsilon>0$.
   D'après de thm d'approximation, $\exists g\in ESC([a,b],\mathbb{C}),\quad \|f-g\|_\infty\le\varepsilon$.
   $|\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\ \mathrm{d}t - \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\ \mathrm{d}t| \le (b-a)\|f-g\|_\infty \le (b-a)\varepsilon$.
   Par inégalité triangulaire : $|\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\ \mathrm{d}t| \le (b-a+1)\varepsilon$.

MED