

Un aperçu de méthodes de démonstration (parmi bien d'autres) (*Les parties en italiques ne sont que des ébauches de démonstrations; il conviendrait de développer*).

1. Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment :

Soit f une fonction continue par morceaux de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On notera $ESC_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans \mathbb{C} .

Soit la propriété :

$$\text{Il existe } \varphi \in ESC_{[a,b]} \text{ tel que } \|f - \varphi\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \varepsilon. \quad (P_{[a,b]})$$

On va prouver par l'absurde que $(P_{[0,1]})$: supposons que $(P_{[0,1]})$ est faux.

(a) **Si $(P_{[0,1/2]})$ et $(P_{[1/2,1]})$ sont vrais, alors $(P_{[0,1]})$ est vrai :**

On fabrique $\varphi \in ESC_{[0,1]}$ en utilisant $\varphi_1 \in ESC_{[0,1/2]}$ et $\varphi_2 \in ESC_{[1/2,1]}$.

(b) **On construit deux suites adjacentes $(a_n), (b_n)$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, (P_{[a_n, b_n]})$ est faux :**

C'est une définition par récurrence :

Initialisation : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Pour $n \geq 1$: $(P_{[a_{n-1}, b_{n-1}]})$ est faux donc, d'après a-, en choisissant pour $[a_n, b_n]$ l'une des moitiés de $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, $(P_{[a_n, b_n]})$ est faux.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = 1/2^n$.

(c) **L'existence de $c = \lim a_n = \lim b_n$ conduit à une absurdité :**

f admet une limite l_g en c à gauche et une limite l_d en c à droite.

Soit $\alpha > 0$ et φ définie sur $[c - \alpha, c + \alpha]$ par :

$$\forall t \in [c - \alpha, c[, \varphi(t) = l_g, \quad \varphi(c) = f(c), \quad \forall t \in]c, c + \alpha], \varphi(t) = l_d.$$

On peut choisir c pour que $\|f - \varphi\|_{\infty}^{[c-\alpha, c+\alpha]} \leq \varepsilon$ puis n pour que $[a_n, b_n] \subset [c - \alpha, c + \alpha]$ ce qui prouve que $(P_{[a_n, b_n]})$ est vrai, ce qui est absurde

2. Un lemme : Toute fonction continue d'un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est "uniformément continue" sur $[a, b]$:

ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (t_1, t_2) \in [a, b]^2, |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et la propriété $\exists \alpha > 0, \forall (t_1, t_2) \in [a, b]^2, |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon$ $P'_{[a,b]}$.

Comme au 1-, on peut prouver par l'absurde que $(P_{[0,1]})$ en procédant par "dichotomie".

Un corollaire : Toute fonction continue périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est "uniformément continue" sur \mathbb{R} .

3. Théorème de Weierstrass pour une fonction continue périodique sur \mathbb{R} :

Soit f une fonction continue et 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

On cherche une suite (P_n) telle que $\lim \|f - P_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} (= \lim \|f - P_n\|_{\infty}^{[-\pi, \pi]}) = 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n soit un polynôme trigonométrique.

On note $Q_n(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} (1 + \cos x)^n$ et

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) Q_n(t) dt.$$

Idée : Si n est "grand",

- $Q_n(t)$ est "minuscule" dès que $t \neq 0$ (cf d-) donc $P_n(x)$ est "proche" de $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c f(x-t) Q_n(t) dt$ pour un c "faible",
- a_n est "proche" de $b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c f(x) Q_n(t) dt$ (cf la "continuité uniforme" des fonctions continues périodiques)
- b_n est "proche" de $f(x)$ (car $\frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c Q_n(t) dt$ est proche de $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q_n(t) dt = 1$ d'après d-).

(a) $P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) Q_n(x-t) dt :$

Par changement de variable et en utilisant les périodicités.

(b) P_n est un polynôme trigonométrique :

On développe $\cos(x-t)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) dt = 1 :$

On trouve une intégrale de Wallis par changement de variable $t = 2\theta$

(d) Si $c > 0$, alors (Q_n) est de limite nulle pour $\|\cdot\|_{\infty}^{[c, \pi]}$:

On étudie les variations de Q_n .

4. Théorème de Weierstrass pour une fonction continue sur un segment :

Soit f une fonction continue de $[-1, 1]$ dans \mathbb{C} .

On cherche une suite (Q_n) telle que $\lim \|f - Q_n\|_{\infty}^{[-1, 1]} = 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n soit un polynôme.

On se ramène au thm précédent :

(a) $\forall x \in [-1, 1], \exists u \in [0, \pi], f(x) = f(\cos u) . :$

$u = \arccos x$

(b) $f \circ \cos = g$ est continue et 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} :

On peut donc trouver une suite (P_n) telle que $\lim \|f - P_n\|_{\infty}^{[-\pi, \pi]} = 0$ et que, pour tout

$n \in \mathbb{N}$, P_n soit un polynôme trigonométrique : $P_n(u) = \sum_{k=-d_n}^{d_n} c_{n,k} \exp(iku)$.

(c) $\frac{1}{2}(P_n(-u) + P_n(u))$ est de la forme $Q_n(\cos(u))$:

$$\frac{1}{2}(P_n(-u) + P_n(u)) = \sum_{k=-d_n}^{d_n} c_{n,k} \cos(ku) \text{ et } \cos(ku) \text{ est un polynôme en } \cos u.$$

(d) $\|f - Q_n\|_{\infty}^{[-1, 1]} \leq \|g - P_n\|_{\infty}^{[-\pi, \pi]}$:

$\forall x \in [-1, 1], |f(x) - Q_n(x)| = \frac{1}{2} |(g(-u) - P_n(-u)) + (g(u) - P_n(u))|$, parce que g est paire, et on cherche un majorant.