Recherche des valeurs propres d'une matrice par la méthode de la puissance itérée

Dans tout le problème, si X est un vecteur de $\mathbb{K}^n$, $(X)_i$ désigne sa i-ème coordonnée dans la base canonique.

1. *Etude d'un exemple*
   Soit $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -81 & 30 & 26 \\ -86 & 35 & 26 \\ -82 & 30 & 27 \end{pmatrix}$.
   Avec Maple :
   (a) Méthode 1 : En utilisant "charpoly", "eigenvals", "eigenvects", "jordan", déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
   (b) Méthode 2 : On définit deux suites (U_p) et (α_p) de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$ respectivement par :
   $$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \forall p \geq 2 \quad U_p = \frac{AU_{p-1}}{\|AU_{p-1}\|_\infty} ; \ \forall p \geq 2 \quad \alpha_p = \frac{(AU_{p-1})_1}{(U_{p-1})_1}.$$
   Calculer les 10 premiers termes de ces suites. Que remarque-t-on ?
2. *Cas général*
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note D_k la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
   $$d_{k,k} = 1; \ \forall (i,j) \neq (k,k) \quad d_{i,j} = 0.$$
   Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Soit $(V_1, ..., V_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres (distinctes ou non) $\lambda_1, ..., \lambda_n$ et soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $(V_1, ..., V_n)$.
   Soit $Z_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par la relation de récurrence :
   $$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad Z_p = AZ_{p-1}$$
   et l'on va étudier pour $i \in [\![1, n]\!]$ les rapports :
   $$(r_p)_i = \frac{(Z_p)_i}{(Z_{p-1})_i}$$
   quand ils seront définis.
   (a) Montrer qu'il existe dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices $M_1, ..., M_n$ telles que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p = (\lambda_1)^p M_1 + ... + (\lambda_n)^p M_n.$$
   On exprimera chaque matrice M_i à l'aide de P et de D_i.
   (b) Calculer $M_1 + ... + M_n$ ainsi que $M_i M_j$ pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. En déduire que la famille $(M_1, ..., M_n)$ est libre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   Dans toute la suite de cette partie, on suppose que : $|\lambda_1| > |\lambda_2 \geq ... \geq |\lambda_n|$.
   (c) Montrer que $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
   (d) On choisit un vecteur $Z_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $M_1 Z_0 \neq 0$, puis un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $(M_1 Z_0)_i \neq 0$.
      i. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall p \geq p_0 \quad (Z_p)_i \neq 0$. En déduire que $\lim\limits_{p\to\infty} (r_p)_i$ existe et vaut λ_1.
      ii. Déterminer $W = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{1}{(\lambda_1)^p} Z_p$ et montrer que W est un vecteur propre de A.
3. *Recherche des autres valeurs propres*
   On suppose $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_i|$ pour tout $i \geq 3$.
   (a) Soit X_1 un vecteur propre de A associé à λ_1 tel que $\|X_1\|_2 = 1$. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale $Q = (X_1, U_2, ..., U_n)$.
   Soit $B = A - \lambda_1 X_1^t X_1$. Comparer les polynômes caractéristiques de A et B. (On pourra calculer d'abord la matrice ${}^tQBQ$).
   Quelle est la valeur propre de module maximal de B ?
   (b) *Avec Maple :* Déterminer les valeurs propres λ_2 et λ_3 de la matrice A de la partie 1.