Méthode de Schmidt - Projection orthogonale

1. *ps* étant un produit scalaire donné sur un espace vectoriel E, écrire une fonction **Ortho(l,n)** qui prend (l,n) où l est une famille libre de n vecteurs de E et retourne son orthonormalisée par la méthode de Schmidt.
2. Avec Maple : montrer que l'ensemble E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles qu'il existe un entier n vérifiant $f(x) = o(x^n)$ en $+\infty$, est un espace vectoriel contenant les fonctions réelles continues et bornées, ainsi que $\mathbb{R}[X]$.

   Montrer que $< f, g >= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour $<\,,\,>$.

   Déterminer P, projection orthogonale de cos sur $\mathbb{R}_2[X]$ et représenter $\cos - P$ sur $[-1, 1]$. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(\cos x - P(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

   Cent O16-C038

Factorisation QR

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(V_1, ..., V_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes identifiés à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   Soit $(U_1, ..., U_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(V_1, ..., V_n)$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et Q la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de vecteurs colonnes $U_1, ..., U_n$. Prouver que Q est une matrice orthogonale et que $R =^t QA$ est une matrice triangulaire supérieure d'éléments diagonaux strictement positifs.
   On a ainsi obtenue une "factorisation QR" de la matrice A. Prouver qu'elle est unique et que $A_1 = RQ$ est semblable à A..
2. *Avec Maple :* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est inversible ; calculer Q, R et RQ.
3. On construit une suite (A_k) de matrice par récurrence en posant $A_0 = A$ et si $A_k = Q_k R_k$ alors $A_{k+1} = R_k Q_k$. Calculer A_{20} pour la matrice A utilisée au 2. Que constate-t-on ?

M-65