Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $h = \dfrac{1}{n}$ et pour $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = \dfrac{k}{n}$.
On note S l'ensemble des fonctions (dites *splines cubiques*) de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de s à $[x_i, x_{i+1}]$ est polynômiale de degré au plus 3.
Dans tout ce qui suit, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

I) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.
Soit $(h_0 = (t \mapsto 1), h_1 = (t \mapsto (t-a)), h_2 = (t \mapsto (t-a)^3), h_3 = (t \mapsto (t-b)^3)$. Justifier que $(h_i)_{0 \leq i \leq 3}$ est une base de E.
Soit $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in \mathbb{C}^4$. Prouver qu'il existe une fonction $h \in E$ et une seule telle que $h(a) = \alpha, h(b) = \beta, h''(a) = \lambda, h''(b) = \mu$.
On exprimera h au moyen de $(h_i)_{0 \leq i \leq 3}$.

II) Soit $(m_0, .., m_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Montrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
i) $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de g à $[x_i, x_{i+1}]$ est polynômiale de degré au plus 3
ii) $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $g(x_i) = f(x_i)$
iii) $g''(0) = m_0$; $g''(1) = m_n$ et $\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad m_i = \lim\limits_{x_i^-} g'' = \lim\limits_{x_i^+} g''$.
On établira que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ et tout $t \in [x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$g(t) = m_i \frac{(x_{i+1} - t)^3}{6h} - m_{i+1} \frac{(x_i - t)^3}{6h} + u_i (t - x_i) + v_i$$

où $u_i = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \dfrac{h}{6}(m_{i+1} - m_i)$ et $v_i = f(x_i) - \dfrac{h^2}{6} m_i$.

III) Montrer que

$$(\star) \begin{cases} g \in S \\ g'(0) = f'(0) \\ \forall i \in [\![0, n]\!] \ g(x_i) = f(x_i) \\ g'(1) = f'(1) \end{cases} \iff HM = B$$

où H est la matrice carrée d'ordre $n+1$ définie par :

$$\begin{cases} H_{i,j} = 0 \ \text{si} \ |i-j| \geq 2 \\ H_{i,j} = 1 \ \text{si} \ |i-j| = 1 \\ H_{1,1} = H_{n+1,n+1} = 2; \ \forall i \in [\![2, n]\!] \quad H_{i,i} = 4 \end{cases}$$

et B est une matrice colonne d'éléments :

$$\begin{cases} B_1 = \dfrac{6}{h^2}(f(x_1) - f(0) - hf'(0)) \\ \forall i \in [\![2, n]\!] \ B_i = \dfrac{6}{h^2}(f(x_{n-1}) - 2f(x_n) + f(x_{n+1})) \\ B_{n+1} = \dfrac{6}{h^2}(f(x_{n-1}) - f(1) + hf'(1)) \end{cases}$$

IV) Soit H la matrice introduite au III) et X une matrice colonne à $n+1$ éléments notés $x_0, ..., x_n$. Calculer ${}^tXHX$ et étudier le signe de son unique élément.
Prouver que la matrice H est inversible et que le problème $(\star)$ admet une solution g et une seule.

V) *Avec Maple.*
Comparer la courbe exacte, l'interpolation polynomiale (de Lagrange), et l'interpolation par spline cubique dans les cas suivants :
– $f = exp$; $n = 2, 4, 6$
– $f = (t \mapsto \sin(5\pi t)$; $n = 3, 5, 7, 9$
(On pourra chercher dans *CurveFitting*).

The term "spline" comes from the flexible spline devices used by shipbuilders and draftsmen to draw smooth shapes (in Wikipedia)