A propos des développements limités :

>u :=n->arccos(1-tan(1/n)) ;	*On définit une suite (ou une série) par son terme général*
>uDev :=series(u(n),n=infinity,4) ;	*Développement en* $O(1/n^4)$
>uDevTronc :=convert(uDev,polynom) ;	*Partie régulière du développement (on supprime le* $O(1/n^4)$*)*
>a1 :=coeff(uDevTronc,n,-1) ;	*Le coefficient de* n^{-1}

A propos des sommes :

>SomPart :=n->sum($'u(k)','k'=1..n$) ;	
>Som :=sum($'u(k)','k'=1..$infinity) ;	*Parfois, donne la somme de la série ; parfois, rien du tout ..*

Convergence, rythme de convergence de quelques séries :

1. *Avec Maple :* Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$; à quelle condition la série de terme général

$$n + a\sqrt{n^2+n+1} + b\sqrt{n^2-n+2} + c\sqrt{n^2+n+3}$$

est-elle convergente ? O10-131

2. Soit $\sum u_n, \sum v_n, \sum w_n$ défines par $\forall n \geq 1,\ u_n = \dfrac{1}{n^3}, \forall n \geq 1,\ v_n = \dfrac{1}{n(n^2-1)}$ et $w_n = u_n - v_n$.

   Prouver que les trois séries sont convergentes et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} v_n$.

   Calculer un équivalent α_n de $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$ et un équivalent β_n de $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} w_i$. On pourra utiliser des encadrements par des intégrales. Que remarque-t-on ?

   Avec Maple : Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à 10^{-16} près en utilisant ce qui précède.

3. Soit $\sum u_n, \sum v_n, \sum w_n$ défines par $\forall n \geq 2,\ u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}, \forall n \geq 3,\ v_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{n-1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$ et $w_n = u_n - v_n$.

   Prouver que les trois séries sont convergentes et calculer $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} v_n$.

   Calculer un équivalent α_n de $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$ et un majorant β_n de $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} w_i$. On pourra, pour α_n, utiliser des encadrements par des intégrales et, pour β_n, appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $F = \begin{array}{ccc} [n-1, n+1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_n^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} \end{array}$. Que remarque-t-on ?

   Avec Maple : Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à 10^{-8} près en utilisant ce qui précède.

m-52b