Ecriture d'une *procedure* **:**

```
>Factorielle :=proc(n)                (déclaration de la procedure et des variables d'appel)
  local p,k;                          (déclaration des variables locales)
  p :=1;                              (initialisation de la variable locale p)
  for k from 2 to n do
                p :=p*k               (mise à jour de la variable p)
  od;
  return p;
  end;
```

Ecriture d'une *procedure* **récursive :**

```
>Factorielle :=proc(n)
  if n=0 then return 1                (le cas particulier évident)
        else return n*Factorielle(n-1)  (utilisation de la "formule de récurrence")
  fi;
  end;
```

Quelques rappels :

- Pour aller à la ligne dans un même "chevron" : majuscule-entrée
- Les éléments d'une *list* sont numérotés à partir de 1.
  Le 4−ème élément de la *list* "truc" est appelé par truc[4].
  On obtient une *list* en mettant des "crochets" autour d'une *sequence*.
- seq(truc$[k], k = 3..17)$ donne la *sequence* des éléments numérotés 3 à 17 dans la *list* "truc".

Les fractions continues

1. **Etude de fractions continues finies** :
   A toute suite finie $(a_0, a_1, ..., a_n)$ de nombres réels tels que $a_0 \geq 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad a_i > 0$, on associe

$$F[a_0, a_1, .., a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

   On s'intéressera essentiellement au cas où les a_i sont des nombres entiers.

   (a) Vérifier la formule $F[a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n] = F[a_0, a_1, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}]$.
   Avec Maple, écrire une procedure **Calcul($\boldsymbol{a, n}$)** qui prend en argument (a, n), n étant un entier naturel non nul et a une *list* $[a_0, ..., a_n]$ et renvoie le nombre $F[a_0, a_1, .., a_n]$.

   (b) *Avec Maple*, calculer $F[a_0, a_1, .., a_n]$ dans les cas suivants :
   - $\forall i \quad a_i = 1$ et $n = 10, 100, 1000$.
   - $\forall i \quad a_i = 2$ si i est pair, $a_i = 1$ si i est impair, et $n = 10, 100, 1000$.

2. **Etude de fractions continues infinies** :
   On note S l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant : $a_0 \in \mathbf{N}$ et pour tout $n \geq 1$, $a_n \in \mathbf{N}^*$.
   On va démontrer qu'il existe un nombre α irrationnel tel que $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} F[a_0, ..., a_n]$. On notera $\alpha = F[a_0, a_1, ...]$.

   Etant donné une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de S, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$p_0 = a_0 \ , \ p_1 = a_0 a_1 + 1 \ , \ q_0 = 1 \ , \ q_1 = a_1$$

   puis, pour $n \geq 2$, par :

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{et} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $q_n \geq n$.
   Dans la suite, pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

   (b) Pour $n \geq 1$, calculer $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$.
   Prouver que $\dfrac{p_n}{q_n}$ est irréductible et que $\forall n \geq 1 \quad \dfrac{p_n}{q_n} = F[a_0, ..., a_n]$..

(c) Pour $n \geq 2$, calculer $p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2}$

(d) Pour $n \geq 1$, calculer $x_n - x_{n-1}$ et pour $n \geq 2$, calculer $x_n - x_{n-2}$ en fonction des a_k et des q_k.
En déduire que les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

(e) On note α la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On se propose de démontrer par l'absurde que α est un nombre irrationnel.
En supposant que $\alpha = \dfrac{c}{d} \in \mathbf{Q}$, avec $d \in \mathbf{N}^*$, et en utilisant l'encadrement $0 < \alpha - x_{2n} < x_{2n+1} - x_{2n}$, déterminer un entier k_n vérifiant $0 < k_n < \dfrac{d}{q_{2n+1}}$. En déduire que α n'est pas rationnel.

(f) Calculer $F[1, 1, ...]$ et $F[2, 1, 2, 1, ...]$.

3. **Fraction continue infinie associée à un nombre irrationnel** :
Soit x un nombre irrationnel strictement positif. **On suppose qu'il existe** une suite $a = (a_n)$ de S telle que $x = F[a_0, a_1, ...]$.

(a) Démontrer que $\forall i \in \mathbb{N} \quad F[a_i, ...] = a_i + \dfrac{1}{F[a_{i+1}, ...]}$.
Démontrer que, nécessairement, $a_0 = [x]$ et $\forall i \in \mathbb{N}^* \quad a_i = \left[\dfrac{1}{F[a_{i-1}, ...] - a_{i-1}}\right]$.

(b) *Avec Maple*, écrire une procedure "A" qui à (x, n) associe la liste $[a_0, a_1, ..., a_n]$ des $n + 1$ premiers termes de la suite a de S associée à x.
On choisit $x = \pi = 3,1415926535...$; calculer $a_0, ..., a_4$ puis $x_0, ..., x_4$. Que constate-t-on ?

On peut démontrer (ENS-PC-2004) que la suite a définie ci-dessus est bien élément de S et solution de $x = F[a_0, a_1, ...]$.