1. Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On considère $\mathrm{Im}(u+v)$ et $\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$. Lequel est inclus dans l'autre ? Démonstration ?
   Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n > 2$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Prouver que $\det(A +^t A) = 0$ (en se servant du début de l'exercice). (Gau-ccp) O17-900
2. $P(X) = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - ... - X^2 - X - 1$ et $Q(X) = (n+1)X^n - nX^{n+1} - 1$.
   Prouver que P et Q ont les mêmes racines et que les racines de P sont simples. (Dem-ccp) O17-901
3. E est un ensemble à n éléments, P l'ensemble des parties de E. Calculer $\displaystyle\sum_{X\in P} card(X)$. (Raph-ccp) O17-902
4. Soit $f(x) = \left(\dfrac{5^x + 2^x}{2}\right)^{1/x}$. Etudier les limites en $0, +\infty, -\infty$. (And-ccp) O17-904
5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A.^tA.A = I_n$. Déterminer toutes les matrices A possibles. (Royn-CCP) O17-905
6. A est une matrice inversible de rang 6 vérifiant $\mathrm{tr}A = 8$ et $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.
   Prouver que A est diagonalisable. Trouver l'ordre des valeurs propres, une matrice diagonale semblable et le polynôme caractéristique. (Liss-ccp) O17-906
7. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k/n}$. Trouver la limite par 2 méthodes.
   Question supplémentaire : Démontrer le thm des sommes de Riemann sur un exemple. (Esp-ccp) O17-908
8. II) Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
   Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $S_n(\mathbb{R})$.
   II-bis) Soit U une matrice réelle à n lignes et 1 colonne. On suppose que ${}^tUU = 1$ et on note $P = U{}^tU$.
   Montrer que P est diagonalisable puis donner les éléments propres de P. (Crum et Loub-ccp) O17-909
9. II) Soit $A_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$ et $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$.
   Exprimer A_n en fonction de S_n. Trouver $\lim S_n$ puis $\lim A_n$. (Bois-ccp) O17-910
10. Soit E de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.
    $f \circ g$ admet λ pour valeur propre. Montrer que $g \circ f$ admet λ pour valeur propre. O17-911
11. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = 0$.
    Déterminer les dimensions respectives de $\ker f$ et $\mathrm{Im}f$.
    Montrer qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Zun* O17-912
12. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A$ et $A^3 - 3A + 2I_n = 0$.
    Montrer que A est diagonalisable.
    Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\det A = (-2)^k$.
    Soit $G_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} A^j$. Montrer que G_k est diagonalisable et que G_k est inversible. *Sol* O17-913
13. Soit $\varphi : M \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ fixée et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
    Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Etudier les sous-espaces propres et les valeurs propres. *Vit* O17-914
14. $A = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
    Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$, $U = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il vecteur propre de A ? Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, clairement inversible. Dire, sans calcul, à quoi ressemble $P^{-1}AP$. Donner la première colonne de cette matrice. (Kei-ccp) O17-915
15. Trouver les limites de $f(x) = (\tan x)^{\tan(2x)}$ en 0^+, $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}^-$. O17-173
16. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 - 1)y'' - 6y = 0$. O17-174
17. Donner le développement de Taylor avec reste intégrale de $\exp x$ sur $[0, 1]$. Limite de la suite de terme général $u_n = n \sin(2\pi n!\mathrm{e})$. O17-175
18. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{t^2})\, \mathrm{d}t$. O17-176

19. Projection orthogonale de $M(x, y, z)$ sur $D : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = -t \end{cases}$. O17-178
20. A, carrée d'ordre n, de diagonale nulle et dont tous les autres coefficients valent 1, est-elle diagonalisable ?
    Calculer $(A + I_n)^2$ et en déduire la valeurs propres possibles de A. Le sont-elle réellement ? O17-179
21. Soit E un ensemble, et f une application de E dans E.
    On suppose que f est surjective. Montrer que $f \circ f$ est surjective.
    On suppose que $f \in L(E)$ vérifie $f = f \circ f \circ f$.
    Montrer que f est surjective si et seulement si elle est injective. O17-180
22. Convergence de la série de terme général $\ln(\tanh n)$. O17-181
23. Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+x^2}\, \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ puis la calculer. O17-182
24. Soit f non nulle de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant :
    $\forall p \in \mathbb{Z},\ f(2p) = 0,\ f(p+4) = f(p)$ et $\forall q \in \mathbb{Z},\ f(pq) = f(p)f(q)$.
    Calculer $f(1)$. Montrer que $f(3) = \pm 1$.
    On suppose que $f(3) = -1$; calculer $f(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. O17-183
25. Montrer que (e, e) est un point critique de f définie sur $]0, +\infty[^2$ par $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$.
    Donner un développement limité de $f(e - x, e + x)$; qu'en déduit-on ? O17-184
26. Soit $f(x, y) = \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2}$ pour $(x, y)(0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.
    Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$.
    Que peut-on en déduire pour f ? O17-185
27. Montrer que f, définie sur $]0, \pi[$ par $f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$, est prolongeable en en une fonction continue et dérivable en 0.
    Quelle est la position de la tangente en ce point ? O17-186
28. Donner le rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis la dimension de du sous-espace propre associé à 0.
    Pour quelles valeurs de k est-elle diagonalisable ? O17-C143
29. Montrer que $\phi_A(M) = A^t M A$, où A est une matrice fixée, définit une endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A|B) = \mathrm{tr}({}^t AB)$; est-il diagonalisable ? O17-C144
30. Lieu des points équidistants à $D_1 : \begin{cases} x = y \\ z = a \end{cases}$ et $D_2 : \begin{cases} x = y \\ z = -a \end{cases}$ O17-C145
31. Dans E euclidien, on définit $s(x) = x - 2(x|a)a$ où a est un vecteur unitaire de E.
    Donner le noyau de $s - Id$ et sa dimension. Quel est le noyau de $s + Id$? s est-il diagonalisable ? O17-C146
32. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ euclidien dont le premier vecteur soit colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
    Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+y-2z = 0$. O17-C147
33. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 +^t M = I_3$ est-elle diagonalisable ? O17-C148
34. Donner le rang et le spectre de la matrice carrée de coefficient $a_{ij} = \frac{i}{j}$. O17-C149
35. Donner les extrema de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et de $g(x, y) =?$. O17-C150
36. Montrer que $\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. O17-C151
37. Trouver les extrema locaux de $f(x, y) = x^2 + x^2 y - xy^2 + y^2$. O17-C152
38. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$. Calculer $B = M^2$ et $P(M)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
    Montrer que si M est diagonalisable, A l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ? O17-C153

39. Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ et r une rotation de $\mathbb{R}^3$, que dire de $\big(r(e_1), r(e_2), r(e_3)\big)$?
Quels doivent être a, b et c pour que $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$? Quel est l'angle de cette rotation ? O17-C154
40. Déterminer les éléments propres de la matrice M dont tous les coefficients valent 1. O17-C155
41. Donner le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. O17-C156
42. Reconnaître l'endomorphisme associé à $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$; comment trouver ses éléments caractéristiques ? O17-C157
43. Déterminer les extrema de $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2 - \mathrm{e}^{-y})^2$. O17-C158
44. Résoudre $y'' + 2y' + y = \cos^2 x$. O17-C160
45. Montrer que f, défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = A^tMA$ où A est une matrice fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire $(M|N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$. O17-C161
46. Montrer que $u(x) = (x|a)b + (x|b)a$, où (a, b) est une famille libre de E euclidien, est un endomorphisme.
Déterminer son image, son noyau, calculer $u(a + b)$ et $u(a - b)$.
u est-il diagonalisable ? O17-C162
47. Que dire de M, réelle, carrée d'ordre n, de trace nulle et vérifiant $M^3 - (n + 1)M^2 + M = 0$? O17-C163
48. Montrer que A, carrée d'ordre 6, réelle, inversible, de trace 8 et vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, est diagonalisable.
Donner ses valeurs propres et son polynôme caractéristique. O17-C164
49. Soit $D_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ x_1 & & & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.
Soit $P_n(x) = D_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$.
Calculer $P_2(x)$. Montrer que $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Montrer que $D_n(x_1, \ldots, x_n) = D_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k)$.
En déduire $D_n(x_1, \ldots, x_n)$. O17-C165
50. Quel est le lieu des points z tels que $f(z) = \dfrac{z + 1}{z + 2i}$ soit réel ? O17-C166
51. II) Pour quelle valeur de a, 2 est-elle valeur propre de :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 + a & 3 \end{pmatrix}$? A est-elle alors diagonalisable ?
III) Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que M^2 est diagonalisable et que 0 est valeur propre de M^2.
Montrer que $M + I_3$ est inversible. O17-C167
52. Soient A, B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles.
Montrer qu'il existe Δ symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles telle que $\Delta^2 = A$.
Montrer que $\mathrm{tr}(AB) \geq 0$. O17-C168
53. Soient A et B les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $a_{ij} = j$ et $b_{ij} = ij$ pour tout (i, j). Trouver le rang et le déterminant de A.
Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de B. O17-C169
54. Montrer que $f(x) = \dfrac{\ln(1 - x^2)}{x^2}$ est intégrable sur $]0, 1[$.
Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. O17-C170

55. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\, \mathrm{d}t$ converge.
    Montrer que $I = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. O17-C171
56. Soit $P = \{z \in \mathbb{C},\ \Im(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.
    Montrer que $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D. O17-C172
57. Soit $f(x,y) = x^y$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Discuter, suivant les valeurs de λ de $C_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ f(x,y) = \lambda\}$. O17-C173
58. Montrer la convergence de $\sum \dfrac{\cos(n\alpha)}{n!}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et calculer la somme de cette série. O17-C174
59. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$. Calculer M^2.
    Montrer que, si M est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
    Étudier la réciproque. O17-C176
60. Soit $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$. Soit, pour $(x,y) \in G^2$, $x \Delta y = x \star a \star y$. Montrer que (G, Δ) est un groupe. O17-C179
61. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $A^t AA = I_n$. O17-C183
62. Exprimer $A_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$ en fonction de $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\bigl(1 + \frac{k}{n}\bigr)$. Trouver la limite de (S_n) puis celle de (A_n). O17-C184
63. Montrer que $f(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$, définie sur $]0, \pi[$ est derivable en 0 et donner la position de la courbe par rapport à la tangente. O17-C185
64. Calculer les coefficients de Fourier de f, $2\pi-$périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \left|\sin \dfrac{x}{2}\right|$. O17-C187
65. Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{Im}u = \mathrm{Im}u^2 \iff \mathrm{Ker}u + \mathrm{Im}u = E$ O17-C188
66. Domaine de definition de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$.
    Est-elle prolongeable par continuité ?
    Est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$? O17-C189
67. Soit $f(t) = \dfrac{(\ln t)^2}{1-t}$; montrer que pour $t \in I =]0,1[$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\ln t)^2 t^n$.
    Étudier l'intégrabilité de f sur I. Vérifier que $\displaystyle\int_I f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$. O17-C190
68. Étudier la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin t + \sin(2t) \end{cases}$.
    La tracer et donner sa longueur. O17-C191
69. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, vérifiant $f \circ g = Id$.
    Montrer que $\mathrm{Ker}g \circ f = \mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}g \circ f = \mathrm{Im}g$ et $E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}g$. O17-C192
70. Après en avoir donné un polynôme annulateur, donner le spectre de la matrice J portant des 1 sur sa diagonale secondaire et des 0 partout ailleurs. O17-C193
71. Soient a, b, c 3 réels. Soit $A = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ O_n & cI_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$; montrer que si ac alors A est diagonalisable. Qu'en est-il si $a = c$? O17-C194
72. Donner le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. O17-C195
73. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\, \mathrm{d}x$ convergent, puis que $I = J$. O17-C197
74. Donner le rang de $\begin{pmatrix} a+b+c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2b & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$, suivant les réels a, b et c. O17-C198