1. (II)-Déterminer tous les nombres complexes u tels que $|u| = |1+u| = 1$.
   (IIbis)-Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme orthogonal. Montrer que $\ker(f - Id_E)$ et $\mathrm{Im}(f - Id_E)$ sont supplémentaires orthogonaux.
   CCP-Guig-LeBl O16-900
2. (II)-Soit f, endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, tel que $f^3 = 2f^2$. Prouver que $\mathrm{tr}(f)$ est un entier pair.
   CCP-Thom O16-901
3. II) Trouver toutes les rotations vectorielles du plan ayant pour polynôme annulateur $X^3 + X^2 - X - 1$.
   II-bis) Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme orthogonal de E. Montrer que f est une symétrie orthogonale si et seulement si f est diagonalisable. *CCP-Bourg-Migu* O16-902
4. II) Soit (u_n) une suite décroissante, réelle, positive, telle que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{n}$.
   Montrer que $\lim u_n = 0$; trouver un équivalent de u_n. *CCP-Duca* O16-903
5. II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2$ et $\mathrm{tr}A = n$.
   Donner le spectre de A, son polynôme caractéristique, et prouver que $A = I_n$. *CCP-Borg-Bert* O16-904
6. II) Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, trouver la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y - z = 0$. *CCP-Soub* O16-905
7. (II)-(sans préparation)
   Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}, a \in E$.
   Soit $\phi \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \quad \phi(x) = x + \alpha(x.a)a$.
   Montrer que ϕ est symétrique.
   Valeurs propres et sous-espaces propres de ϕ.
   (II bis)(sans préparation)
   Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $(A +^t A)$ nilpotente. Prouver que A est antisymétrique.
   CCP-Jeauf O16-907
8. (II)(sans préparation) $\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 4) \\ y' = \dfrac{1}{3}(2x - y + 2z + 2) \\ x' = \dfrac{1}{3}(2x + 2y - z + 4) \end{array}\right.$.
   Quelle est la nature de l'application qui à (x, y, z) associe (x', y', z') ?
   CCP-Jeauf O16-908
9. (II)(sans préparation) Soit f un endomorphisme orthogonal. Montrer que $\ker(f - Id) - (\mathrm{Im}(f - Id))^{\perp}$.
   CCP-Jeauf O16-909
10. (II)(sans préparation) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
    A est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ? Combien de solutions a l'équation $M^2 = A$, avec $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
    CCP-Jeauf O16-910
11. II) Résolution d'une équation différentielle avec méthode de variation des deux constantes. *CCP* O16-C160
12. II) Convergence simple de la série de fonctions $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^3 x^2}$.
    Convergence normale de cette série sur $[A, +\infty[$ avec $A > 0$.
    Que peut-on en déduire sur la somme de la série ? *CCP* O16-C161
13. II) Donner le reste de la division euclidienne de $X^{2n} + X^n + 1$ par $X^2 + X + 1$. *CCP* O16-C163
14. II) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^5 \ln t}{(1 + t^6)^2}\, \mathrm{d}t$ existe, puis que $I = 0$. *CCP* O16-C164
15. II) Déterminer de deux manières différentes la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n}}$. *CCP* O16-C165
16. II) Quelles sont les valeurs propres possibles de $p \in \mathcal{L}(E)$, tel que $p \circ p$ soit un projecteur, E étant un espace de dimension finie ?
    Montrer que p est diagonalisable et que $p^3 = p$. *CCP* O16-C166

17. II) Soit E un espace euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que $p \circ q = 0$ implique $q \circ p = 0$. *CCP* O16-C167
18. II) Donner la matrice canoniquement associée au projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $P : x + y + z = 0$ parallèlement à $D : x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3} \cdot$ *CCP* O16-C168
19. II) Déterminer les extrema de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. *CCP* O16-C169
20. II) Trouver $k \in \mathbb{R}^*$ pour que l'équation $P''(X^3) = kP'(X^2)$ ait une solution telle que $P' \neq 0$, dans $\mathbb{C}[X]$, puis résoudre l'équation. *CCP* O16-C170
21. II) Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, donner la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}u$ où $u = (a, b, c)$ est unitaire.

    Donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix}$. *CCP* O16-C171
22. II) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in GL(E)$ tel que f^2 soit diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable. *CCP* O16-C172
23. II) Montrer que $G = \left\{ A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{t^2}{2} & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ est un groupe pour le produit matriciel.

    Que faudrait-il pour avoir un anneau ? Est-ce le cas ? *CCP* O16-C173
24. II) Soit A carrée d'ordre n à coefficients complexes.

    Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice définie par $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$ en fonction de celui de A.

    CCP O16-C174
25. II) On munit $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

    Calculer $(\sin \mid \cos)$. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a\cos t + b\sin t - t)^2\,\mathrm{d}t$.

    CCP O16-C175
26. II) Soit E de dimension n, f, g deux endomorphismes de E tels que $f + g = Id_E$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Montrer que f et g sont des projecteurs.

    CCP O16-C176
27. II) Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ (on simplifiera $\displaystyle\sum_{n=2}^{p} \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$).

    CCP O16-C177
28. II) Montrer que pour tout p projecteur de E, $E = \mathrm{Ker}p \oplus \mathrm{Im}p$.
    Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$. f est-il un projecteur ?

    CCP O16-C178
29. II) Montrer que f de rang 1 dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle. Donner les puissances de f. Caractériser $g = \dfrac{1}{\mathrm{tr}f} f$.

    CCP O16-C179
30. II) Montrer que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle et vérifiant $A^3 = -A$, est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

    CCP O16-C180
31. II) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, vérifiant $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
    Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\big(x, f(x), f^2(x)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$, et que $Vect\big(f(x), f^2(x)\big)$ est stable par f.

    CCP O16-C181

32. II) Ensemble de définition de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.
    Est-elle continue ? Dérivable ? Intégrable sur D_f ?
    CCP O16-C183
33. II) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $J_n = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à J_n.
    Montrer que (Id, f, f^2) est liée.
    Montrer que f est combinaison linéaire de Id et d'un projecteur.
    J_n est elle diagonalisable ?
    CCP O16-C184
34. II) Rayon de convergence et somme de $\sum \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3} x^n$.
    CCP O16-C185
35. II) Donner la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$.
    En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
    CCP O16-C186
36. II) Soient u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$ si et seulement si u et v sont des projecteurs et $\mathrm{Ker} u = \mathrm{Ker} v$.
    CCP O16-C187
37. II) Donner les points d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ tels que $f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$ est réel et ceux tels que $f(z)$ est imaginaire pur.
    CCP O16-C188
38. II) Montrer que f, continue et dérivable, telle que f' tend vers $+\infty$ en $+\infty$, tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
    CCP O16-C189
39. II) Dessiner $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, 1-x-y \geq 0\}$.
    Montrer que $f(x,y) = xy(1-x-y)$ admet un maximum sur D et que ce maximum n'est pas sur « une frontière ».
    CCP O16-C190
40. II) Trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points A d'affixe 1, M d'affixe z et N d'affixe z^2-1, distincts, soient alignés.
    CCP O16-C191
41. II) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles (ou pavés rectangles) de volume 1, quels sont ceux d'aire minimale ?
    CCP O16-C192
42. II) Prouver que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{(n!n^n)}\right)^{1/n} = \exp\left(\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x\right)$.
    CCP O16-C193
43. II) Déterminer $E = \{P \in \mathbb{C}[X],\, P(X^2) = P(X)P(X+1)\}$.
    CCP O16-C194
44. II) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x^3 + \lambda x$. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de sa réciproque.
    CCP O16-C195