1. Unicité : Soit P_n et Q_n tels que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n(z+z^{-1}) = Q_n(z+z^{-1}) = z^n + z^{-n}$.
   En particulier, pour $z = \exp(i\theta),\ \theta \in \mathbb{R}$, $\forall x = 2\cos\theta \in [-2,2],\ P_n(x) = Q_n(x)$: $P_n - Q_n$ s'annule sur un ensemble infini donc est le polynôme nul.
   Existence : Soit Π_n : "Il existe P_n, polynôme de degré n, à coefficients dans Z, de terme dominant X^n pour $n \geq 1$, 2 pour $n = 0$ tel que ...".
   Π_0 ($P_0 = 2$) et Π_1 ($P_1 = X$).
   Supposons Π_{n-1} et Π_n pour un $n \geq 1$. $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ (z+z^{-1})P_n(z+z^{-1}) = z^{n+1} + z^{-(n+1)} + P_{n-1}(z+z^{-1})$; $XP_n - P_{n-1}$ est un polynôme de degré $n+1$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de terme dominant X^{n+1}, et qui vérifie $\forall z \in \mathbb{C}^*, ...$, d'où Π_{n+1}.
   Par récurrence, la suite existe et vérifie la relation $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$.

2. Soit $(P,Q) \in E^2$ et $f = t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{4-t^2}}$.
   f est CM sur $]-2,2[$; PQ est continue donc bornée sur le segment $[-2,2]$ donc bornée sur $]-2,2[$ donc $|f(t)| =_{t\to 2} O(\dfrac{1}{(2-t)^{1/2}})$; f est intégrable sur $[0,2[$, et de même sur $]-2,0]$.
   On vient de prouver que $\langle .,. \rangle$ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.
   Elle est clairement linéaire à droite et symétrique.
   Par positivité de $\displaystyle\int_{-2}^{2}$, elle est positive et, pour tout $P \in E$, $(t \mapsto \dfrac{P^2(t)}{\sqrt{4-t^2}})$ étant continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et par positivité stricte de $\displaystyle\int_{-2}^{2}$, P s'annule sur $]-2,2[$ qui est infini, donc est le polynôme nul.
   $(P_0, ..., P_6)$ est une famille orthogonale.
   Généralisation : Par changement de variable $\mathcal{C}^1-$bijectif ($\theta \in]0,\pi[\mapsto x = 2\cos\theta \in]-2,2[$), on a :
   $\langle P_n, P_m \rangle = \displaystyle\int_{\pi}^{0} \frac{2\cos n\theta . 2\cos m\theta}{2\sin\theta}(-2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta) = 0$ si $n \neq m$.
   $(P_k/||P_k\|)_{k=0..n}$ est une famille orthonormale telle que $\forall k,\ Vect(P_0, ..., P_k) = Vect(X^0, ..., X^k)$, donc, au signe près éventuellement, c'est l'orthonormalisée de Schmidt de la base usuelle de E (rubrique "unicité" dans Gram-Schmidt).

3. Il semble que tout P_n admette n racines réelles distinctes situées dans $[-2,2]$. Prouvons le.
   Soit $n \geq 1$ et $x = 2\cos t = z + z^{-1}$ avec $z = e^{it}$.
   $P_n(x) = 0 \iff 2\cos nt = 0 \iff t = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$.
   $0 \leq \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} \leq \pi \iff k \in [\![0, n-1]\!]$ et $2\cos$ induit une injection de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ donc les $2\cos(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n})$, $k = 0...n-1$ sont n racines distinctes de P_n (situées dans $[-2,2]$).