I) Montrer que $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |x\mathrm{e}^{-x}| = \mathrm{e}^{-1}$.

Donner le rayon de convergence de $\sum nx^n$ et montrer que sa somme vaut $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Montrer que la série de fonctions (u_n) définies par $u_n(x) = nx^n\mathrm{e}^{-nx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\sum u_n(x)$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1-x\mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\right)^2$. O15-C187

I) On donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel $(.|.)$, $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire.

f est un endomorphisme de E et sa matrice dans la base B est A de terme général $a_{ij} = i + j$.

Soit $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ke_k$ et $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$.

1. Sans calculer ses valeurs propres, prouver que f est diagonalisable.
2. Exprimer $f(e_k)$ à l'aide de u et v.
   En déduire $f(x) = (x|v)u + (x|u)v$.
   Montrer que $E = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v$ et $\ker f = (\mathrm{Im} f)^{\perp}$.
   En remarquant que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f, on note désormais g l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f.
3. Donner la matrice de g dans (u, v).
   Quelles sont les valeurs propres de g ?
4. Quelles sont les valeurs propres de f ?

O15-901

I) $P_n = nX^n - (X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1)$.

1. Montrer que 1 est racine simple.
2. Soit $A_n = (X-1)P_n$. Montrer que 1 est racine double. Calculer A_n et A'_n.
3. Montrer que P_n a n racines simples dans $\mathbb{C}$.
4. $z \in \mathbb{C}$ et $|z| = 1, z \neq 1$. Montrer que $|z+1| < 2$.
5. Soit z une racine de P_n différente de 1. Montrer que $|z| < 1$.

O15-908

I) Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \end{array}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Dérivées partielles et points critiques sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?
2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad (x > A \text{ ou } y > A) \Rightarrow f(x,y) \leq \dfrac{1}{A}$.
4. Montrer que f admet un maximum absolu sur $\mathbb{R}_+^2$ et qu'il existe un unique point pour lequel il est atteint.

O15-909

I) Soit $u_n(x,y) = \dfrac{x^n}{1+y^{2n}}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n(x,x)$ converge absolument si $x \neq 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge pour $|x| < 1$.
   Montrer que la suite (u_n) ne tend pas vers 0 pour $x \geq 1, |y| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   Donner un équivalent de u_n pour $x \geq 1, |y| > \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
3. Soit $\mathcal{D} =]-1,1[\times\mathbb{R} \cup \{(x,y)/1 < |x| < y^2\}$. Dessiner $\mathcal{D}$. Pourquoi est-ce un ouvert ?
4. Montrer que la série $\sum u_n(x,y)$ converge si et seulement si $(x,y) \in \mathcal{D}$.

O15-911

I) Montrer l'existence, pour $x > 1$ de $u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} k^{-x}$ et de $\zeta(x) = u_1(x)$.

Trouver un encadrement de u_n par comparaison avec une intégrale et en déduire qu'en $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{n^{-x}}{x-1}$.

Pour quelles valeurs de x la série des u_n converge-t-elle ?

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} k^{-(x-1)} + nu_n$.

Pour $\sum u_n$ convergente, dire pour quelles valeurs de x la série de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ converge.

O15-C166

Montrer que $\dfrac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t$.

Montrer que $A(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $A'(x)$.

Montrer que $A(x) \leq \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x\frac{\pi}{2}}}{x}$ et en déduire la limite de A en $+\infty$.

Trouver la limite de A en $-\infty$ et tracer le graphe de A. O15-C167

I) Soient n complexes distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; montrer que ϕ définie par $\phi(P) = \Big(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)\Big)$ est linéaire et injective de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{C}^n$. En déduire que :

$\forall (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$, $\exists! P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$.

Soit M une matrice d'ordre n possédant n valeurs propres distinctes ; montrer que B, d'ordre n, commute avec M si et seulement si B est un polynôme de M. O15-C168

I) Nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot$

En remarquant que $\displaystyle\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$ donner une expression simplifiée de la somme partielle S_n d'ordre n.

En déduire que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\cdot$ Donner le signe de $\displaystyle\frac{\pi}{4} - S_n$. O15-C169

1)) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, existence et calcul de :

$I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t$ et $J_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t$.

2)) Existence de :

$S(n) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2 + x^2}$ et $I(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}\, t} t$.

Trouver une relation simple entre $I(n)$ et $S(n)$. O15-C170

I) Montrer que $y' = 2xy + 1$ admet une solution f nulle en 0.
Montrer que $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
Déterminer l'unique solution développable en série entière et nulle en 0.
Montrer que $f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!} \right) x^{2n+1}$
Calculer $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2n+1} \binom{n}{k}$. O15-C171

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ avec $0 < a_1 < \ldots < a_n$ et P son polynôme caractéristique.

Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes L_i de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $\forall (i,k) \in [\![1 n^2]\!]$, $L_i(-a_k) = \delta_{ik}$ que cette famille constitue une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que tout polynôme $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ s'écrit $S = \sum_{i=1}^{n} S(-a_i) L_i$.

Montrer que $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P(X) = \alpha \prod_{k=1}^{n} (X + a_k) + Q(X)$.

Montrer que $P(-a_i) = a_i \prod_{k=1}^{n} (a_i - a_k)$.

Montrer que $P(X) = (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} (X + a_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{ik} (X + a_i) \right)$.

Montrer que λ est une valeur propre de A ssi $\sum_{p=1}^{n} \frac{a_p}{\lambda + a_p} = 1$.

Montrer que A est diagonalisable. O15-C172

I) Pour x fixé dans $]-1,1[$, on pose $f_x(\theta) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n \cos(n\theta)}{n}\cdot$

Montrer que $f_x(0)$ et $f_x(\pi)$ sont définies et calculer leur valeur.

Montrer que f_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f_x'(\theta) = -\dfrac{x\sin\theta}{1+2x\cos\theta+x^2}\cdot$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\ \mathrm{d}\theta$, pour tout $x \in]-1,1[$ puis pour tout $x \in [-1,1]$. O15-C173

I) Montrer que $S(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\arctan(n^2x^2)}{n^2x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire.

Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{x}$ est décroissante.

Montrer que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\arctan(n^2x^2)}{n^2x^2} \geq \dfrac{4N}{\pi}$ avec $0 \leq x \leq \dfrac{1}{N}$, puis que $\lim_{x\to 0} S(x) = +\infty$. Montrer qu'en $+\infty$, $S(x) \sim \dfrac{\pi^3}{12x^2}\cdot$ O15-C174

I) Justifier l'existence des intégrales suivantes :
$A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\tan^2 x}\ \mathrm{d}x$; $B_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x$;
$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{x^2}\ \mathrm{d}x$; $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\ \mathrm{d}x$.
Montrer que $A_n \leq I_n \leq B_n$ et que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = J$.

Montrer que $B_{n+1} - B_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x$ et que $(B_{n+1} - B_n)$ est une suite constante. En déduire B_n.

O15-C175

I) On note f_n la fonction défine sur $\mathbb{R}$ par :
$0 \leq x \leq n,\ f_n(x) = \Big(1 - \dfrac{E(x)}{n}\Big)^n$; $x > n,\ f_n(x) = 0$.
Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$.
On note $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{k}{n}\Big)^n$; montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^n$.
Montrer que $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$.
Montrer que (f_n) converge simplement sur $]-1, +\infty[$.
Déterminer la limite de (u_n).

O15-C176