I ) Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que $f$ et $f'$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

Justifier que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t$ et en déduire que $f$ a une limite en $+\infty$. Montrer que cette limite est nulle.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}f(0) + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)\ \mathrm{d}t$.

On suppose $f''$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}f(0) + \frac{o(1)}{x}$ en $+\infty$.

On ne suppose plus $f''$ intégrable mais on veut montrer que le résultat persiste :

soit $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, montrer que $\lim_{x\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos(xt)\ \mathrm{d}t = 0$ ; conclure. O15-C181

I ) Montrer que $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\ \mathrm{d}x$ tend vers 0.

Trouver $a$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{a} - \frac{(n+1)(n+2)}{a^2}u_n$.

Donner un équivalent de $u_n$ en $+\infty$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.

Montrer que $g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$ a un prolongement en 1.

Montrer de deux manières différentes que $\sum u_n = \int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x$.

Soit $f$ continue sur $[0,1[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ ; montrer que si $\frac{f(x)}{1-x}$ est intégrable sur $[0,1[$, alors la série de terme général $v_n = \int_0^1 x^n f(x)\ \mathrm{d}x$ converge et calculer sa somme. O15-C182

I ) Soit $L^2$ l'ensemble des suites réelles $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telles que $\sum \alpha_n^2$ converge.

On admet que $\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2}$ est une norme euclidienne sur $L^2$.

Montrer que $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

En déduire que $L^2$ est un espace vectoriel réel.

Montrer que $\sum \dfrac{\alpha_n}{n} \sin(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\Phi(\alpha)$ définie par $\Phi(\alpha)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} \sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $p \geq 1$ ; calculer $\int_0^{\pi} \sin(px)\Phi(\alpha)(x)\,\mathrm{d}x$.

En déduire que $\alpha \mapsto \Phi(\alpha)$ est une application linéaire injective de $L^2$ vers $C(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\alpha \in L^2$, $\Phi(\alpha)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\|\Phi(\alpha)\|_\infty = \sup\Big\{|\Phi(\alpha)(x)|,\ x \in \mathbb{R}\Big\}$ ; montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall \alpha \in L^2$, $\|\Phi(\alpha)\|_\infty \leq k.\|\alpha\|$.
(on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz). O15-C184

I ) Montrer que pour $x \in \mathbb{Q}$, $u_n(x) = \cos(n!\pi x)$ est constante, égale à 1 à partir d'un certain rang.

Sachant que $\mathrm{e} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$, montrer que $n!\mathrm{e} = P_n + r_n$ où $P_n \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{1}{n+1} \leq r_n \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{n+1}$.

Que devient $u_n(x)$ si $x \in \mathrm{e}\mathbb{Z}$ ? Etudier $\Big(u_n(e)\Big)$.

Etudier la série de terme général $v_n = 1 - u_n(\mathrm{e})$. O15-C185

I) Soit $f(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$. On note $E_f$ l'ensemble de définition de $f$.

1. Déterminer $E_f$. Montrer que $f$ est continue sur $E_f$.
2. Expliciter $f$ à l'aide des fonctions usuelles.
3. Soit $g(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \left( \frac{x}{1-x} \right)^n$.
   Déterminer le domaine de définition de $g$. Expliciter $g$.
4. $g$ est-elle développable en série entière au voisinage de $0$ ?

O15-900

I ) Dériver $\ln |\tanh x|$.

Montrer que $\mathrm{e}^{rx}$ est solutions de $y'' - 2 \tanh x y' + y = \frac{2}{\operatorname{ch} x}$ si et seulement si $r \in \{-1, 1\}$.

En déduire une solution paire de l'équation et une solution de l'équation homogène associée.

Soit $y$ de classe $\mathcal{C}^2$ ; montrer que $y$ est solution de l'équation homogène si et seulement si $u = \frac{y}{\operatorname{sh}}$ est solution d'une équation à déterminer.

Trouver les solutions de cette dernière équation, en déduire celles de l'équation homogène, puis celles de l'équation complète.

O15-C191

I ) On note $E$ l'espace des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note $T(f)(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ et $S(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$. A quelle condition existe-t-il au moins une solution non nulle sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = y'(0) = 0$ ?

Justifier que $T(f)$ et $S(f)$ sont dérivables et préciser $(T(f))'$ et $(S(f))'$. Montrer que $T$ et $S$ sont des endomorphismes de $E$.

Soit $f \in E$. Montrer que $h = T \circ S(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et calculer $h''$ ; montrer que $h(1) = h'(0) = 0$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $T \circ S$. O15-C193

I ) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f(1),\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 0\}$.

Soit $\varphi(f)$ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 tf(t)\ \mathrm{d}t$.

Vérifier que $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(f)(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Montrer que $\varphi(f) \in E$.

Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme, déterminer son noyau et montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \{g \in E / g'(0) = g'(1)\}$.

Montrer que $E = F \oplus G$ avec $F = \{f \in E / f(1-x) = f(x)\}$ et $G = \{g \in E / g(1-x) = -g(x)\}$.

Montrer que $\varphi(F) \subset G$ et $\varphi(G) \subset F$. O15-C194

I ) Exprimer, en fonction de $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_0 \in \mathbb{C}[X]$, le polynôme caractéristique de $C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Quels polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ sont polynômes caractéristiques d'au moins une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ?

On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines distinctes ou confondues de $P$.

Montrer que $C_p$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont on donnera les éléments diagonaux.

Montrer que $\forall Q \in \mathbb{C}[X]$, $\delta(P, Q) = \det Q(C_p) = \prod_{k=1}^{n} Q(\alpha_k)$.

Montrer que si $Q$ est unitaire, $\delta(P, Q) = (-1)^{\deg P \deg Q}\delta(Q, P)$.

Que dire de $P$ tel que $\Delta_p = \delta(P, P') = 0$ ?

Calculer $\Delta_p$ pour $P = X^2 + bX + c$ et $P = X^3 + bX + c$. O15-C196

I ) Montrer que $x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Montrer que $\lim_{x \to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} \, \mathrm{d}t = 0$.

$x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t$ admet-elle une limite en $+\infty$ ?

Montrer que $x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t$ est développable en série entière sur un domaine qu'on précisera. O15-C197

I ) On note $\Gamma$ la courbe d'équation $\rho = \sin^4 \dfrac{\theta}{4}\cdot$

Quelle relation y a-t-il entre $\rho(\theta + 4\pi)$, $\rho(-\theta)$ et $\rho(\theta)$ ? Qu'en déduit-on pour $\Gamma$ ? Donner la tangente à $\Gamma$ aux points $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$.

Calculer la longueur de $\Gamma$ et la tracer. Donner le repère de Frenet, l'angle de $\vec{T}$ avec l'horizontale et le rayon de courbure. O15-C198

I ) Montrer que $f$ défini par $f(P)(X) = P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $K[X]$ de noyau $K$.

Soit $f_n$ la restriction de $f$ à $K_n[X]$ ; montrer que $\mathrm{Im}(f_n) = K_{n-1}[X]$ et en déduire que $f$ est surjective.

Montrer que $K[X] = K \oplus XK[X]$ .

Soit $Q \in K[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q(X)$ et $P(0) = 0$. O15-C199

I ) Montrer que $\forall u \in ]0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\dfrac{x\cos u}{u^2+x^2}| \leq \dfrac{|x|}{u^2+x^2}$.

Montrer que $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\cos u}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$ et $\psi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\psi$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$ pour $x > 0$, $-\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$ et $\psi(0) = 0$.

Montrer que $\exists K \in \mathbb{R}_+^*$, $|\phi(x) - \dfrac{\pi}{2}| \leq Kx$.

$\phi$ est-elle continue ? Continue par morceaux ? O15-157

I) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $F_k(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k \sin(xt)\ \mathrm{d}t$.

1. Expliciter $F_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que $F_0$ est développable en série entière au voisinage de 0. Calculer son développement et trouver son rayon de convergence.
2. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_k$ est développable en série entière au voisinage de 0.
3. Montrer que $F_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle $xy' + (k+1)y = \sin x$.
   Existe-t-il d'autres solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle ?
4. On définit $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(x)}{k+1}$. Montrer que $S$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

O15-902

I) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & f(M) = -M + (\mathrm{tr}M)A \end{array}$.

1. Montrer que $f$ est linéaire.
2. Dans le cas où $\mathrm{tr}A \neq 1$, montrer que $f$ est bijective.
3. Dans le cas où $\mathrm{tr}A = 1$, montrer que
   $\ker f = \mathrm{Vect}(A)$,
   $\mathrm{Im}(f) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{tr}M = 0\}$.
4. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $f(X) = B$.
5. Calculer la trace de $f$.
   En déduire que $f$ peut être diagonalisable. Montrer que $f$ est diagonalisable si $\mathrm{tr}A \neq 0$.

O15-903

I) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -c & a+2c & b \\ -b & 2b-c & a+2c \end{pmatrix}$. On appelle $E$ l'ensemble des matrices $M$.

1. Calculer $M(0, 1, 0) = A$. $A$ est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $A^2$. Est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Donner une base de $E$ et sa dimension.
4. Montrer que $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), \quad P^{-1}MP$ est diagonale.
5. $M$ est-elle inversible ? Si oui, montrer que $(M(a, b, c))^{-1} \in E$.

O15-904