I) Soit $u_0 \in]0,1[$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \int_0^1 |x-t| \, \mathrm{d}t$.
Montrer que pour $x \in [0,1], f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}\cdot$
Déterminer la valeur de $f(x)$ quand $x < 0$ puis quand $x > 1$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
Calculer la dérivée de f et la majorer en valeur absolue.
En déduire que $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ que l'on calculera.
Que se passe-t-il quand $u_0 \geq 1$? O16-C180

I) Montrer la décroissance de $f(t) = \frac{\ln t}{t}\cdot$
Soit $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{(\ln n)^2}{2}\cdot$
Montrer que $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} \, \mathrm{d}t$.
En déduire la monotonie de (u_n).
Montrer que $u_n + \frac{(\ln n)^2}{2} \geq \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t} \, \mathrm{d}t$.
En déduire que (u_n) converge. O16-C181

I) Montrer que $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\ \mathrm{d}t$ existe.
Calculer $J_{n+2} - J_n$.
En déduire que $(J_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. Montrer que, pour $a > 0$ et $\phi \in C^1([0,a],\mathbb{R})$, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^a \phi(t)\mathrm{e}^{int}\ \mathrm{d}t = 0$.
Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
Existence de $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\ \mathrm{d}t$. O16-C184

I) Soient $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$, $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\ \mathrm{d}t$,
$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t$ et $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\ \mathrm{d}t$.
Montrer que $\mathrm{e}^x \geq 1+x$ et que $1-t^2 \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$.
Justifier l'existence de I, I_n, J_n, W_n puis montrer que $I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n$.
Montrer que $I_n = W_{2n+1}$ et $J_{n+1} = W_{2n}$.
Montrer que (W_n) est monotone.
Montrer que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. Calculer I. O16-C187

I) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. On pose $\mu_k = t^k$.
Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^k \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$ converge.
Montrer, pour $P \in E$, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$ converge.
On pose, pour tout $P \in E$, $\mathcal{L}(P)(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$.
Montrer que $\mathcal{L}(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)\mathcal{L}(\mu_k)$.
En déduire que $\mathcal{L}(\mu_k) = (-1)^k k! \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} \mu_j$.
En déduire que $\mathcal{L}$ est trigonalisable.
$\mathcal{L}$ est-il diagonalisable ? Donner ses valeurs propres. O16-C188

I) Soit $M = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ -8 & -11 & -4 \\ 12 & 18 & 7 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que $\det(M - XId) = (1-X)^3$. M est elle diagonalisable ?

M est-elle trigonalisable ? Montrer qu'on peut écrire $M = Id + N$, où N est une matrice nilpotente.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{n} M^n)$.

Soit X un vecteur ; montrer que f qui, à la matrice A, associe AX, est continue. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{n} \, M^n X)$.

Soit $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ non nul, et $X_{n+1} = MX_n$.

Montrer que pour tout n, X_n est non nul.

Montrer que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}$ est en général une série convergente. O16-C189

I) Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$, auquel on associe une matrice compagnon de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Montrer que le rang de C_p vaut n si $a_0 \neq 0$ et vaut $n-1$ si $a_0 = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{rg}(C_p - \lambda I_n) \leq n-1$.

En déduire la dimension des espaces propres associés.

Montrer que $\chi_{C_p} = (-1)^n P(X)$. Montrer que C_p est trigonalisable. À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur le polynôme P la matrice C_p est-elle diagonalisable ?

Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ les racines de P. On suppose $P \in \mathbb{Z}[X]$ et on écrit $P(X) = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m_k}$.

Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $Q(X) = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k^q)^{m_k} \in \mathbb{Z}[X]$. O16-C190

I) Soit $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, avec $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\forall t \in [\min(0,x), \max(0,x)]$, $xt \geq 0$. En déduire que $f(x)$ existe. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la parité de f. Montrer que $f(x) > \int_0^x \frac{\ln(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, et en déduire la limite de f en $+\infty$.

manque une ou deux questions. Peut-être :

– Prouver que $\frac{f(x)}{x} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2u)}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u$ si $x > 0$.

– Etudier $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

– En majorant $\int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{\ln(1+x^2u)}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u$ et $\int_{1/\sqrt{x}}^1 \frac{\ln(1+x^2u)}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u$, prouver que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

– Représenter la fonction f. O16-C191

I) Soient E euclidien de dimension $n+1$ et $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit a un vecteur de E unitaire et orthogonal à e_0. On pose $a_i = (a|e_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Prouver que $S = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_1 & & & \\ \vdots & & 0_n & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$, où 0_n désigne la matrice nulle carrée d'ordre n, est diagonalisable.

Montrer qu'au moins un des a_i n'est pas nul, en déduire le rang de S. Déterminer $\mathrm{Ker} S$ et donner une base de son orthogonal.

Calculer $\mathrm{tr} S$ et $\mathrm{tr} S^2$.

En déduire les valeurs propres non nulles de S.

Calculer Se_0 et Sa. En déduire les sous-espaces propres associées aux valeurs propres non nulles. O16-C192

I) Soient $E = \mathbb{R}^n$, $u = (1, \ldots, 1) \in E$, et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. On pose $s(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

Soit Φ_A l'endomorphisme de E canoniquement associé à A. Exprimer $\big(u|\Phi_A(u)\big)$ en fonction de $s(A)$.

En déduire que $|s(A)| \leq n$.

Montrer que si $|s(A)| = n$, alors alors $\Phi_A(u) = \pm u$.

Soit $n = 2$. Déterminer l'ensemble des matrices telles que $|s(A)| = 2$. O16-C193

I) Montrer que $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n}$, où $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$, est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f satisfait l'équation différentielle $ty'' + y' + ty = 0$.

Montrer que $g(t) = f^2(t) + (f')^2(t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\ \mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

Prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$; à l'aide d'une relation entre F et F', exprimer $F(x)$ (le résultat comporte une constante C inconnue).

Prouver que $\forall x > 1, \quad F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{4^n x^{2n+1}}$ et en déduire C. O16-C194

I) Montrer que $f(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\int_0^1 t^i P(t)\ \mathrm{d}t \right) X^i$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que si $P \in \mathrm{Ker} f$, alors $\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. En déduire que $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.

Donner la forme de H, la matrice canoniquement associée à f.

Est-elle inversible ? Diagonalisable ? Répondre sans calculs.

Soit $U \in \mathbb{R}^{n+1}$; montrer que ${}^tUHU = \displaystyle\int_0^1 P^2(t)\ \mathrm{d}t$ où P est un polynôme. A-t-on ${}^tUHU \geq 0$?

Montrer que si ${}^tUHU = 0$, alors $U = 0$.

Montrer que les valeurs propres de H sont strictement positives. O16-C195

I) Montrer que $M(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & -\operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ définit une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que $M^2(t) = I_2$ et calculer $M(0)$.

On considère une application $M(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $M^2(t) = M(0) = I_n$.

Montrer que $M(t)$ est diagonalisable.

Montrer que $M(t)M'(t) = -M'(t)M(t)$; $M'(t) = -M(t)M'(t)M(t)$.

Montrer que $\phi(t) = \operatorname{tr} M(t)$ est une fonction constante.

Déterminer toutes les applications M.

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'il existe P inversible vérifiant $M =^t PJP$. Montrer que $M^2 = I_3$.

Soient A et B vérifiant ces mêmes hypothèses, montrer qu'il existe $S \in SO_3(\mathbb{R})$ telle que $A =^t SBS$.

Montrer qu'il existe ϕ, définie sur $[0,1]$, telle que $\phi(0) = \phi(1) = A$. O15-C177

I) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Q_n(x) = \mathrm{e}^x I_n$ est un polynôme à coefficients réels, dont on donnera le degré et le coefficient dominant.

Montrer que $\phi(P)(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on déterminera noyau, image et éléments propres. O15-C178

I) Montrer que les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ sont 0, 1 et 2. Donner les sous-espaces propres de A puis déterminer P et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Montrer que, si le polynôme caractéristique de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est $(-1)^3 \prod_{i=1}^{3}(X - \lambda_i)$, celui de M^2 est $(-1)^3 \prod_{i=1}^{3}(X - \lambda_i^2)$.

On suppose que $M^2 - M = A$; montrer que tout vecteur propre de M l'est aussi de A.

Montrer que $\lambda \in Sp(M)$ si et seulement si $\lambda^2 - \lambda \in \{0, 1, 2\}$ et vérifier que 0 et 1 sont valeurs propres de M. O15-C180

I) Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$ diverge pour $p = 0$ et $p = 1$.

Montrer que, pour $p \geq 2$, $(n+p+1)u_{n+1} = (n+1)u_n$ et en déduire que $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{p-1}(1-(n+1)u_n)$.

Montrer que la suite de terme général $v_n = (n+1)u_n$ est décroissante et en déduire que $\sum u_n$ converge. Montrer que (v_n) tend vers 0 et en déduire la somme de la série des u_n. O16-C179