7-1 - Espaces vectoriels euclidiens

Méthode de Gram-Schmidt

1. **Montrer que ϕ : $\left((P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)\right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.**
   Pour $n=2$, construire à partir de $(1, X, X^2)$ une base orthonormée pour ce produit scalaire. O13-162
2. Soit $\overrightarrow{u_1} = (1,-1,0,2), \overrightarrow{u_2} = (0,0,4,-2); \overrightarrow{u_3} = (2,0,5,-3)$ dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer par la méthode de Schmidt une BON de l'espace engendré par $(\overrightarrow{u_i})_{1\leq i\leq 3}$.
3. Soit $E = \mathbb{R}^3$; F est le sous-espace de E défini par $(x+y+z=0; x-y+z=0)$.
   Donner une base de $F^{\perp}$. O14-934

Projecteur et symétries orthogonaux

4. **Donner la matrice du projecteur orthogonal sur $F = \{X=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z=0; x-y+z-t=0\}$.**
   Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F. O14-939
5. Soit le plan $(P : x+y=2z)$. Trouver la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur (P).
6. Soient trois réels a, b, c vérifiant $a^2+b^2+c^2=1$. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $cx+by+az=0$ dans la base canonique. *CCP* O15-C186

7-2 - Transformations du plan, de l'espace

Automorphismes orthogonaux

1. **Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté de la rotation d'angle $\pi/3$ autour de l'axe dirigé par $(1,-1,1)$.**
2. **Reconnaître l'application f de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté dans lui même donnée par** $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x-y+2z+2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x+2y-z-1) \\ z' = \frac{1}{3}(-x+2y+2z-1) \end{cases}$
   dans un ROND.
3. Prouver que toute rotation de $\mathbb{R}^3$ est la composée de deux réflexions.
4. Etudier l'endomorphime de $\mathbb{R}^3$ euclidien de matrice $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ -2 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
5. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & a \\ 1/\sqrt{3} & 0 & b \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & c \end{pmatrix}$. Déterminer (a,b,c) pour que A soit la matrice dans la base canonique d'une rotation u. Décrire u.

Similitudes

6. Soit (A,B,C) un triangle non dégénéré du plan, s_A (resp.s_B, s_C) la similitude de centre A (resp.B, C) telle que $s_A(B) = C$ (resp. $s_B(C) = A, s_C(A) = B$). Etudier $s_A \circ s_B \circ s_C$ et $s_C \circ s_B \circ s_A$.