7-1 - Espaces vectoriels euclidiens

1. **Méthode de Gram-Schmidt**
   Si $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille libre, son orthonormalisée de Schmidt $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est définie par récurrence :

$$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \ \text{ et } \ \forall i \in \ [\![2,p]\!] \ , \quad u'i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle u_k|e_i\rangle u_k, \quad u_i = \frac{u'_i}{\|u'_i\|}$$

2. **Projecteur, symétrie orthogonal(e)**
   Si E est un espace euclidien et F un sous-espace de E, alors $E = F \oplus F^{\perp}$, ie

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in F \times F^{\perp}, \quad x = y + z$$

   et, si $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une BON de F, alors

$$\boxed{\boldsymbol{y = p_F^{\perp}(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle u_i|x\rangle u_i.}}$$

   Si $s_F^{\perp}$ est la symétrie associée à $p_F^{\perp}$, alors $s_F^{\perp} + Id_E = 2p_F^{\perp}$.

7-2 - Transformations du plan, de l'espace

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

-
$$\boxed{(A \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ est orthogonale }) \iff ({}^t A\, A = I_3) \iff ((C_1, C_2, C_3) \text{ est une BON})}$$
  (C_i est le i-ème vecteur colonne de A).
- ($A \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ est orthogonale directe) $\iff$ ((C_1, C_2, C_3) est une BON directe) (ie (C_1, C_2) est une famille ON et $C_3 = C_1 \wedge C_2$)
- u est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une (ou dans toute) BON est une matrice orthogonale.
- u est une isométrie directe (ou rotation) si et seulement si sa matrice dans une (ou dans toute) BON est une matrice orthogonale directe.
- L'axe $Vect(x_a)$ d'une rotation u est l'ensemble des vecteurs invariants par u.
  Soit x_o un vecteur orthogonal à l'axe.
  L'angle $\theta \in [-\pi, \pi]$ de u vérifie :

$$1 + 2\cos\theta = \text{tr}(u) \ \text{ et } (\theta \geq 0 \iff x_o \wedge u(x_o) \text{ est du même sens que } x_a).$$