6-1 - Espaces vectoriels

Applications linéaires

1. **Comparer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker} v$, $\mathrm{Im}(u \circ v)$ et $\mathrm{Im} u$.**
2. **Soit p et q des projecteurs de E. Prouver que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.**
   Dans ce cas, montrer que $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q$ et $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q$.
3. **L'application ψ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\psi(P)(x) = P(x^2) + (1 + x^2)P(x)$ est-elle linéaire ? injective ? surjective ?** O13-160
4. Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $\phi \in \mathscr{L}(E, F)$. On pose $\psi : \begin{array}{ccc} E \times F & \to & E \times F \\ (x, y) & \mapsto & (x, y - \phi(x)) \end{array}$. Montrer que ψ est un automorphisme d'espace vectoriel.
5. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\phi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & (x \mapsto x \displaystyle\int_0^x f) \end{array}$. Prouver que $\phi \in \mathscr{L}(E)$; déterminer $\ker \phi$ et $\mathrm{Im}\phi$.
6. Montrer que $\varphi : P \to (X + 2)P(X) - XP(X + 1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. En déterminer le noyau. O13-186

Récurrences linéaires

7. **Calculer le terme général de la suite (de Fibonacci) définie par $u_0 = 1, u_1 = 2, \forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.**
8. Etudier la suite u définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2;\ 2u_{n+1} = 3u_n + 2u_{n-1} + 3$. c1-019

6-2 - Dimension des espaces vectoriels

Familles de vecteurs

1. **Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z + t = x - 3y - 2z = 0\}$. Prouver que F est un espace vectoriel et en déterminer une base.**
2. **Soit $e_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2 x \end{array}$, $e_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \cos x \end{array}$, $e_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin^2 x \end{array}$. Prouver que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.**
3. **Soit E un espace vectoriel, u un endomorphisme nilpotent d'indice p de E et $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0_E$. Prouver que $\left(a, u(a), u^2(a), ..., u^{p-1}(a)\right)$ est une famille libre.**
4. Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que
$$(\forall x \in E \quad (x, u(x)) \text{ est liée }) \iff u \text{ est une homothétie.}$$
5. Dans $\mathbb{R}^n$, quel est le rang de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$? O13-175

Dimension, rang

6. **Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par $f(x, y, z) = (x - 3y + 2z, 5x + y + z, -2x - 10y + 5z)$. Prouver que f est linéaire. Déterminer une base de $\ker f$, une base de $\mathrm{Im} f$, $\mathrm{rg} f$.**
7. **Soit E, F, G des espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies et $u \in \mathscr{L}(E, F), v \in \mathscr{L}(F, G)$. Prouver que $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.**
   Soit E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que la suite $(\ker u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

6-3 - Calcul matriciel

Calcul

1. **Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Prouver que $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et calculer A^{-1}.**

2. **Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que sa diagonale n'est composée que de 1, ses autres coefficients étant des 2. Calculer A^p pour p entier non nul.** O14-930

3. **Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in \{1...n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.**

   Démontrer que A est inversible. ("Critère d'Hadamard") A7-14

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer A^n.

Matrice et application linéaire

5. **Ecrire la matrice dans la base canonique du projecteur (resp. de la symétrie) sur le plan d'équation $x + y + z = 0$ de direction la droite $z = -y = 2x$.**

6. **Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

   Prouver que $f : X \in E \mapsto PX$ est linéaire. Déterminer sa matrice dans la base usuelle. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. a7-22

7. **Montrer sans calcul que $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible. Calculer A^n et en déduire A^{-1}.** O14-C229

Matrice et changement de base

8. **Soit B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ dans B_c.**

   On pose $B = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1,1,-1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,2,1)$. Prouver que B est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de ϕ dans B.

9. Soit (C) la conique du plan d'équation $x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 4y = 0$ dans un repère orthonormé direct (O, e_1, e_2). Prouver que (C) admet un centre A et déterminer une équation de (C) dans le repère orthonormé direct (A, u_1, u_2) où u_1 se déduit de e_1 par rotation de $\pi/4$.

Système linéaire

10. **Discuter et résoudre le système linéaire $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$ où $m \in \mathbb{C}$.**