6-1 - Espaces vectoriels

1. **Applications linéaires**
   Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors : $(\forall x \in E, \quad x \in \ker u \iff u(x) = O_F)$
   $(\forall y \in F, \quad y \in \mathrm{Im}(u) \iff \exists x \in E, \quad y = u(x))$
   et u est injective $\iff \ker(u) = \{O_E\}$.
   u est surjective $\iff \mathrm{Im}(u) = F$
   $u \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur de $E \iff u \circ u = u$.
   Si u est un projecteur, alors $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Im}u = \ker(u - Id_E)$.
   $u \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie de $E \iff u \circ u = Id_E \iff \dfrac{1}{2}(u + Id_E)$ est un projecteur.
2. **Sous-espaces**
   F est un sous-espace vectoriel de $E \overset{\text{déf}}{=} \big(F \neq \emptyset$ et $\forall (x,y,\lambda) \in F^2 \times \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F\big)$.
   Soit F et G deux sous-espaces de E.
   $x \in F + G \iff \exists (y,z) \in F \times G, \quad x = y + z$.
   $x \in F \oplus G \iff \exists! (y,z) \in F \times G, \quad x = y + z$.
3. **Récurrences linéaires**
   Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - a u_{n+1} - b u_n = 0$.
   Soit : $EC : r^2 - ar - b = 0$ et Δ son discriminant.
   Si $\Delta \neq 0$, alors $\exists! (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$.
   Si $\Delta = 0$, alors $\exists! (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = k_1 r_1^n + k_2 n r_1^n$.

6-2 - Dimension des espaces vectoriels

$(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille libre de $E \overset{\text{déf}}{=} \forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow (\lambda_i) = 0_{\mathbb{K}^p}$.

$(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille génératrice de $E \overset{\text{déf}}{=} \forall y \in E, \quad \exists (\lambda_i) \in \mathbb{K}^p, \quad y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i x_i$.

$(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $E \overset{\text{déf}}{=} (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est libre et génératrice.
Si E est de dimension finie, alors :

$(\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $E) \iff (\dim E = p$ et $\mathcal{F}$ est libre $) \iff (\dim E = p$ et $\mathcal{F}$ est génératrice $)$.

Soit F et G deux sous-espaces de E.

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) \text{ et}$$

$$(F \oplus G \text{ existe}) \iff F \cap G = \{0_E\} \iff \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Thm du rang : Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et E est de dimension finie, alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}u) + \mathrm{rg}(u).$$

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et E est de dimension finie, alors :

$(u$ est un isomorphisme $) \iff (\dim E = \dim F$ et u est injectif $) \iff (\dim E = \dim F$ et u est surjectif $)$.

6-3 - Calcul matriciel

1. **Ensembles de matrices**
   - $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension np dont $(E_{i,j})$ est la base canonique. Si $n = p$, les sous-espaces des matrices symétriques / antisymétriques en sont deux sous-espaces supplémentaires.
   - Le produit de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ existe si et seulement si $p = q$ et est alors $C \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ de terme général
   $$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$
   - Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(C_1, .., C_p)$ ses vecteurs colonnes. $\mathrm{rg}A \overset{\text{déf}}{=} \dim(Vect(C_1, .., C_p))$.
   Le rang d'une matrice A est invariant par les "opérations élémentaires" (transvections et dilatations).
   $$(A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ est de rang } r) \iff (\exists (U,V) \in GL_n \times GL_p, \quad A = U J_r V).$$
   $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\,{}^t A$.

– L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles est un groupe multiplicatif.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(C_1, .., C_n)$ ses vecteurs colonnes.

$$A \text{ est inversible (ou régulière)} \iff \mathrm{rg}(A) = n \iff (C_1, .., C_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n.$$

2. **Matrice et application linéaire**

$$A = mat_{(e_j),(\varepsilon_i)} u \iff \forall j, \quad u(e_j) = \sum_i a_{i,j} \varepsilon_i,$$

ie la $j$ième colonne de A contient les coordonnées de $u(e_j)$ dans (ε_i).

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(C_1, .., C_p)$ ses vecteurs colonnes. $\mathrm{rg}A \overset{\text{déf}}{=} \dim(Vect(C_1, .., C_p))$.
Si $A = mat_{(e_j),(\varepsilon_i)} u$, alors $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}u = \dim(\mathrm{Im}u)$.

3. **Matrice et changement de base**
$A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est inversible $\iff$ $((C_1, ..., C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n)$.
Soit $P(\in GL_n) = mat_B(B')$. Alors les "formules de changement de base" sont :

$$X = PX'$$
$$\text{et } A = PA'P^{-1}.$$

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on calcule A^{-1} en écrivant que $A = mat_{e_i}(u_i)$ et en cherchant la matrice $mat_{u_i}(e_i)$.

4. **Système linéaire**
Un système linéaire $AX = B$ est de Cramer si et seulement si $\det(A) \neq 0_K$.
Son unique solution est alors donnée par les formules de Cramer :

$$x_1 = \frac{\det(B, C_2, ..., C_n)}{\det(A)}, ..., x_j = \frac{\det(C_1, ..., C_{j-1}, B, C_{j+1}, ..., C_n)}{\det(A)}, ...x_n = \frac{\det(C_1, C_2, ..., B)}{\det(A)}.$$