5-1 - Ensembles, applications, $\mathbb{N}$

Injection, surjection, bijection

1. **Soit $f : (n,p) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto 3n + 5p \in \mathbb{Z}$; f est-elle surjective ? injective ?** a1-043
2. Prouver qu'il n'existe pas d'application surjective d'un ensemble E dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.
   Pour une application f de E dans $\mathcal{P}(E)$, on pourra considérer $A_f = \{x \in E / x \notin f(x)\}$.

Preuve par récurrence - Calcul télescopique

3. **Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.**
4. **Soit $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$.**
   Prouver par récurrence que $\left|\displaystyle\sum_k z_k\right| = \sum_k |z_k| \iff (\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall k, \quad \arg(z_k) = \alpha \mod 2\pi)$.
5. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
   Démontrer que E ne peut pas être une réunion de p sous espaces vectoriels stricts. A6-30
6. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq (1+a)u_n + b$.
   Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_0 \exp(na) + \dfrac{\exp(na) - 1}{a} b$.
7. Soit E l'ensemble des fonctions f vérifiant $f \circ f(x) = \dfrac{x}{3} + 2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
   1. Montrer que $f(x) = 3f(\dfrac{x}{3} + 2) - 6$.
   2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{3^n} + 3(1 - \dfrac{1}{3^n})\right)$.
   3. Conclure.

   CCP c4-014

Dénombrement

8. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $u_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$. Déterminer une relation de récurrence entre les u_k. En déduire u_3 et u_4.**
9. Soit E un ensemble de cardinal n. Prouver que $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| = n2^{n-1}$.
10. Calculer $\displaystyle\sum_{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2} \max(i,j)$ et $\displaystyle\sum_{0 \leq j < i \leq n} (i-j)$. a1-039

5-2 - Structures algébriques usuelles

Groupe, anneau, corps

1. **Soit $(G, .)$ et groupe et $C = \{x \in G / \forall y \in G, \quad x.y = y.x\}$. Prouver que $(C, .)$ est un sous-groupe de $(G, .)$**
2. **Soit $(A, \top, \star)$ un anneau commutatif, intègre, fini. Prouver que, pour tout $a \in A \setminus \{0_\top\}$, l'application $\begin{array}{ccc} A \setminus \{0_\top\} & \to & A \setminus \{0_\top\} \\ x & \mapsto & a \star x \end{array}$ est injective. En déduire que $(A, \top, \star)$ est un corps.**

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

3. **Prouver que, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.**
4. **Soit $(a,b,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{N}$ et q le quotient de $(a-1)$ par b. Trouver le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.**

5-3 - Polynômes

Degré,...

1. **Existence et unicité de la suite (T_n) de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall t \in [0, \pi] \quad T_n(\cos t) = \cos nt$; degré, parité, terme dominant, relation de récurrence entre T_n, T_{n-1}, T_{n-2}.**
2. **Existence et unicité de la suite de fonctions polynômiales (f_n) telle que $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Df_n = f_{n-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 f_n = 1$; degré, terme dominant.**
3. Existence et unicité de la suite P_n de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $P_n\left(t + \dfrac{1}{t}\right) = t^n + \dfrac{1}{t^n}$; degré, parité, terme dominant, relation de récurrence entre P_n, P_{n-1}, P_{n-2}.

Division euclidienne

4. **Quel est le reste de la division euclidienne de $(X^n + 1)^2$ par $(X + 1)^2$?** O13-156
5. A quelle condition sur $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ le polynôme $X^4 + X^2 + aX + b$ a-t-il deux racines doubles dans $\mathbb{C}$?
6. Déterminer le reste de la division euclidienne par $(X^2 + 1)$ de $P(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X \sin k + \cos k)$. *CCP* a4-028

Racines, factorisation

7. **Factoriser $(X^2 - X + 1)^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.**
8. **$P_n(X) = \displaystyle\sum_0^n \frac{(X - a)^k}{k!}$, $a \in \mathbb{C}$. Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X)$ n'a pas de racine multiple.** A4-79
9. **Soit x, y et z trois complexes non nuls tels que $x + y + z = 0$ et $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.** O13-158
10. **Décomposer $\dfrac{1}{X^4 + X^2 + 1}$ en éléments simples.** O13-179
11. (a) Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ un polynôme de degré p et $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$ ses racines. On note $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i$. Calculer de 2 façons le DL de $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$ en $+\infty$. Même question en 0 dans le cas où $P(0) \neq 0$.
    (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Prouver que $(a + b = 0; a^2 + b^2 = 0) \iff (a = b = 0)$.
    Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Prouver que $(a + b + c = 0; a^2 + b^2 + c^2 = 0; a^3 + b^3 + c^3 = 0) \iff (a = b = c = 0)$.
    Généraliser.
12. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 18 \end{cases}$
13. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ et en déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n2^{1-n}$.
14. Soit $P(X) = X^3 - pX + q$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur p et q pour que P admette une racine double. Lorsque c'est le cas, déterminer les racines de P.
15. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + aX^n + b$ dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer que $(X^2 + X + 1)^2$ divise $(X + 1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$. *Centrale* O14-938 a4-011