5-1 - Ensembles, applications, $\mathbb{N}$

f est une **injection** de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F} \overset{\text{déf}}{=} \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{E}^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

f est une **surjection** de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F} \overset{\text{déf}}{=} \forall y \in \mathcal{F}, \quad \exists x \in \mathcal{E}, \quad f(x) = y$.

5-2 - Structures algébriques usuelles

- $(G, \star)$ est un groupe $\overset{\text{déf}}{=}$ $\begin{cases} \star \text{ est une LCI sur } G \\ \star \text{ est associative} \\ \star \text{ admet un élément neutre dans } G \end{cases}$.

  $(H, \star)$ est un sous-groupe de $(G, \star) \iff \begin{cases} H \subset G \text{ et } H \neq \emptyset \\ H \text{ est stable par } \star \\ \forall x \in H, \quad x^{-1} \in H \end{cases}$.
- $(A, +, \star)$ est un anneau $\overset{\text{déf}}{=}$ $\begin{cases} (A, +) \text{ est un groupe commutatif} \\ \star \text{ est une LCI sur } A \\ \star \text{ est associative et distributive sur } + \\ \star \text{ admet un élément neutre dans } A \end{cases}$.

  $(B, +, \star)$ est un sous-anneau de $(A, +, \star) \iff \begin{cases} (B, +) \text{ est un sous-groupe de } (A, +) \\ B \text{ est stable par } \star \\ 1_A \in B \end{cases}$.
- $(K, +, \star)$ est un corps $\overset{\text{déf}}{=}$ $\begin{cases} (K, +, \star) \text{ est un anneau commutatif} \\ (K \setminus \{0_K\}, \star) \text{ est un groupe} \end{cases}$.

5-3 - Polynômes

1. Espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$
   - $\mathbb{K}_n[X]$ est un $K-$espace vectoriel de dimension $n+1$; la "base canonique" est $(X^i)_{0 \leq i \leq n}$.
   - Toute famille échelonnée en degré de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ en est une base.
     Cas particulier : $((X-a)^i)_{0 \leq i \leq n}$; la décomposition dans cette base d'un vecteur de $\mathbb{K}_n[X]$ est donnée par la formule de Taylor :
     $$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (X-a)^i$$
2. Equation algébrique
   - A est scindé sur $\mathbb{K}$ $\overset{\text{déf}}{=}$
     A est constant ou bien $\deg(A) = n$ et $\exists (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n, \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad A(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$.
   - Soit $A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ et de degré n (ie $a_n \neq 0$). Alors $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les racines distinctes ou non de $A(X)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i \in [\![1,n]\!]} x_i & = & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum_{\{i_1,i_2\} \in ([\![1,n]\!])^2} x_{i_1} x_{i_2} & = & \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \displaystyle\sum_{\{i_1,\dots i_k\} \in ([\![1,n]\!])^k} x_{i_1} \dots x_{i_k} & = & (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \displaystyle\prod_{i \in [\![1,n]\!]} x_i & = & (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

- $a \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de $P(X)$ si et seulement si :

$$\left(\forall i \in [\![0, k-1]\!] \quad P^{(i)}(a) = 0\right) \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0$$

  En particulier, P admet une racine multiple si et seulement si P et P' ont une racine commune.

3. Division euclidienne
   - Si $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $B \neq 0$, alors

$$\exists!(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2, \qquad A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

   - B est un diviseur de $A \overset{\text{déf}}{=} R = 0$.
   - Calculer la valeur en x_0 de A, x_0 étant une racine de B : $A(x_0) = R(x_0)$.
4. Fraction rationnelle
   - On peut les mettre sous forme irréductible $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$ où A et B sont premiers entre eux.

     Par division euclidienne, on trouve donc $F(X) = Q(X) + \dfrac{R(X)}{B(X)}$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
   - Si $\deg(R) < \deg(B)$ et $B(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - x_i)^{k_i}$ où les $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont distincts, $\dfrac{R(X)}{B(X)}$ admet une décomposition et une seule de la forme $\sum_{i=1}^{p} F_i(X)$, où $F_i(X)$, associée au pôle x_i est de la forme $\sum_{j=1}^{k_i} \dfrac{c_{i,j}}{(X - x_i)^j}$.

     Dans le cas particulier où F est à pôles simples,

$$F(X) = A(X) + \sum_{i=1}^{p} \frac{c_{i,1}}{(X - x_i)} \text{ et } c_{i,1} = [(X - x_i)F(X)]_{(X = x_i)}.$$

   - Si $P(X)$ est un polynôme scindé $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$, alors son polynôme dérivé s'écrit

$$P'(X) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{j \in [\![1, n]\!] \\ j \neq i}} (X - x_j) \right)$$

     et la fraction $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$ se décompose sous la forme

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - x_i}$$