4-1 - Etude d'un arc paramétré plan

En cartésiennes

1. **Etudier et construire l'arc $\left(x = \tan t + \sin t ; y = \dfrac{1}{\cos t}\right)$.**
2. Etudier et construire l'arc $(x = t \ln t ; y = t + \ln t)$.
3. Déterminer les points de rebroussement de $\begin{cases} x = t^2 + \dfrac{a}{1+t} \\ y = t + \dfrac{b}{(1+t)^2} \end{cases}$ avec $t \neq -1$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. O14-C266
4. Tracer la courbe $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ et donner l'équation de la tangente. *CCP* O15-C173
5. Etudier et représenter l'arc paramétré : $(x(t) = \arccos(\cos t) + \arccos(\cos 2t)\ ;\ y(t) = \arcsin(\sin t) + \arcsin(\sin 2t))$. f1-23
6. Déterminer un paramétrage de la courbe $y^x = x^y$ en posant $y = tx$ et étudier l'arc paramétré obtenu. f1-35

En polaires

7. **Etudier et construire l'arc $\left(r = \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta}\right)$.**
8. Etudier et construire l'arc $(r = \cos\theta - \cos 2\theta)$.
9. Représenter $r = \tan \dfrac{2\theta}{3}$. *CCP* f2-005
10. Construire la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta - \cos(2\theta)}$. Comment obtient-on les tangentes à la courbe ? Montrer qu'il y a une branche parabolique de direction Ox. *Centrale* f2-006

Etude métrique

11. **Calculer la longueur de la cardioïde d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$, l'aire du domaine intérieur à cette courbe, les coordonnées du centre de courbure au point $A = (0, a)$ et donner une équation cartésienne de la tangente en ce point.**
12. Déterminer tous les arcs plans vérifiant en tout point la relation $R^2 + s^2 = a^2$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est une constante, s une abscisse curviligne et R le rayon de courbure. f3-54
13. Etude et tracé de la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x(t) = t - \tanh t \\ y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$
    Donner le repère de Frenet et le rayon de courbure en un point $M(t)$. *CCP* f3-008
14. $\mathcal{E}$ est une ellipse de demi-axes de longueurs a et b. D_θ est la droite d'équation normale, dans le repère principalde $\mathcal{E}$: $x\cos\theta + y \sin\theta = p(\theta)$.
    Calculer $p(\theta)$ pour que D_θ soit tangente à $\mathcal{E}$.
    Calculer l'aire d'un rectangle circonscrit à $\mathcal{E}$. Dans quel cas cette aire est-elle maximale ? *Centrale* f3-004

4-2 - Champs de vecteurs

Champ dérivant d'un potentiel scalaire

1. **Déterminer $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que $\overrightarrow{V} : \begin{array}{ccc} D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2xyf(y), (3y^2 - x^2 + 3)f(y)) \end{array}$ dérive d'un potentiel scalaire F.**
   Construire les équipotentielles. f6-059

Circulation d'un champ de vecteurs

2. **Calculer $\displaystyle\int_C xy \, \mathrm{d}x + (x + y) \, \mathrm{d}y$**
   - où C est le cercle de centre O de rayon 1 orienté positivement,
   - où C est l'arc AB de la parabole d'équation $y = x^2$, $A = (-1, 1), B = (2, 4)$.