4-1 - Etude d'un arc paramétré plan

1. **Arc paramétré : $\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y}$.**

   Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k \overset{\text{déf}}{=}$ application $f : t \in I \mapsto f(t) \in E$
   où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2. (Dans toute la suite $E = \mathbb{R}^2$)
   Le **support** de l'arc est l'ensemble $f(I)$ de points de E.
   Paramétrage équivalent à f : Application $g : J \to E$ où V est un intervalle de $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\Theta : J \to I, \mathcal{C}^k-$difféomorphisme tel que $f \circ \Theta = g$. (Ils ont le même support dont ils sont des **paramétrages admissibles**)
   Arc orienté : On impose de plus que Θ soit croissant.

   (a) **Etude globale**
   - Ensemble D_f de définition : $t \in D_f \iff x(t)$ et $y(t)$ existent.
   - Ensemble d'étude :
     On se ramène à une représentation propre (l'ensemble des points multiparamétrés est fini).
     Période commune à x et y.
     Parités de x et y.
     $\forall t \in D_f, \quad x(a+t) = \pm x(a-t)$ et $y(b+t) = \pm y(b-t)$.
   - Variations et limites.

   (b) **Etude locale**
   - **Tangente**

     $$M(t_0) \text{ est un point régulier } \overset{\text{déf}}{=} (f \text{ est dérivable en } t_0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq \overrightarrow{0})$$

     En un point régulier $M(t_0)$, la tangente est la droite $(M(t_0), \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0))$.

     $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0) = x'(t_0)\overrightarrow{u_x} + y'(t_0)\overrightarrow{u_y}.$$

     Equation de la tangente :

     $$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

     Un changement de paramètre ne modifie pas les points réguliers ni les tangentes.
     Généralisation : On appelle **entiers caractéristiques** en $M(t_0)$, s'ils existent, les entiers n et p ($n < p$) minimaux tels que $\left(\dfrac{\mathrm{d}^n\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^n}(t_0), \dfrac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)\right)$ soit une famille libre.
     La tangente est alors la droite $(M(t_0), \dfrac{\mathrm{d}^n\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^n}(t_0))$.
   - **Etude en un point stationnaire** :
     n est pair :
     Rebroussement de 1ère espèce : ou de 2ème espèce :

     n est impair :
     Inflexion : ou

   - **Branche infinie** : $\lim\limits_{t \to t_0} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = +\infty$ où $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
     Il y a une **direction asymptotique** de pente a si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$.
     Il y a une **asymptote** d'équation $y = ax + b$ si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - a\,x(t) = b$.
     Il y a une **branche parabolique** de pente a si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$.

(c) **Etude métrique**

– **Abscisse curviligne** :

Fonction s définie à une constante additive près par $s'(x) = \left\| \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}x} \right\|$ ou $\mathrm{d}s = \left\| \overrightarrow{\mathrm{d}M} \right\|$

$s \mapsto \overrightarrow{M}(s)$ est un **paramétrage normal** ie $\forall s$, $\left\| \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds} \right\| = 1$

– **Repère de Frenet** en un point $M(x_0)$:

Le repère orthonormé **direct** $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ défini par $\overrightarrow{T}(x_0) = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}(x_0)$.
On définit modulo 2π un angle $\alpha(x_0)$ tel que :

$$\overrightarrow{T} = (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad \overrightarrow{N} = (-\sin\alpha, \cos\alpha) \qquad \mathrm{d}x = \cos\alpha\ \ \mathrm{d}s \quad \mathrm{d}y = \sin\alpha\ \ \mathrm{d}s.$$

$\tan(\alpha(t_0)) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ et la tangente a pour équation $\begin{vmatrix} x - x(t_0) & \cos\alpha(t_0) \\ y - y(t_0) & \sin\alpha(t_0) \end{vmatrix} = 0.$

– **Courbure** sur un intervalle où l'arc est de classe $\mathcal{C}^2$:

$$c \overset{\textbf{déf}}{=} \frac{d\alpha}{ds}$$

Si $c \neq 0$, on définit le rayon de courbure par $R = 1/c$ et le centre de courbure I en $M(x_0)$ par $\overrightarrow{M(x_0)I} = R\overrightarrow{N}$.
On a les formules de Frenet :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\overrightarrow{N}}{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\overrightarrow{T}}{R}.$$

2. **Arc en polaires :** $\overrightarrow{OM} = r(\theta)\overrightarrow{u_r(\theta)}$**.** ie arc paramétré par $t = \theta = \widehat{u_x, \overrightarrow{OM}}$.

(a) **Etude globale**

– Ensemble D_f de définition : $\theta \in D_f \iff r(\theta)$ existe.

– Ensemble d'étude :
On se ramène à une représentation propre (l'ensemble des points multiparamétrés est fini).
Période de r.
Parité de r .
$\forall \theta \in D_f, \quad r(\theta_0 + \theta) = \pm r(\theta_0 - \theta)$.

– Variations, signe de r et limites.

(b) **Etude locale**

– **Tangente**

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0) = r'(\theta_0)\overrightarrow{u_r}(\theta_0) + r(\theta_0)\overrightarrow{u_\theta}(\theta_0).$$

Equation de la tangente :

$$\begin{vmatrix} x - x(\theta_0) & \cos(\theta_0 + V(\theta_0)) \\ y - y(\theta_0) & \sin(\theta_0 + V(\theta_0)) \end{vmatrix} = 0.$$

avec $x(\theta_0) = r(\theta_0)\cos(\theta_0),\ y(\theta_0) = r(\theta_0)\sin(\theta_0)$ et $V(\theta_0) = \widehat{\overrightarrow{u_r(\theta_0)}, \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}}(\theta_0)$.

Si $r'(\theta_0) \neq 0$, alors $\tan(V(\theta_0)) = \dfrac{r(\theta_0)}{r'(\theta_0)}$ donc $\tan(\theta_0 + V(\theta_0))$ est simple.

– **Branche infinie** : $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = +\infty$ où $\theta_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
Il y a alors une **direction asymptotique** de pente $\tan(\theta_0)$.
Soit $X = r(\theta)\cos(\theta - \theta_0),\ Y = r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$.
Il y a une **asymptote** d'équation $Y = b$ si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} Y = b$.
Il y a une **branche parabolique** de pente $\tan(\theta_0)$ si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} Y = \pm\infty$.

(c) **Etude métrique**

– **Abscisse curviligne** : cf 1-

– **Repère de Frenet** en un point $M(x_0)$: cf 1-

$$\alpha(\theta_0) = \theta_0 + V(\theta_0).$$

– **Courbure** cf 1-

4-2 - Champs de vecteurs

1. Intégrale sur un arc
   Soit U un ouvert de E, espace vectoriel normé de dimension 3 et Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Un champ vectoriel V sur U est une application : $x \in U \mapsto V(x) = \sum_1^3 \alpha_i(x) e_i$.
   Soit $\Gamma : t \in [a,b] \mapsto M(t) \in E$ un arc **orienté** de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux tel que support$(\Gamma) \subset U$.
   $$\int_\Gamma V(\overrightarrow{M}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_\Gamma \sum_1^3 \alpha_i \ \mathrm{d}x_i \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \left(\sum_1^3 \alpha_i[M(t)] \frac{dx_i}{dt} \right) \ \mathrm{d}t$$
   est **la circulation** ou intégrale **de** V **le long de** Γ.
   Cette définition est invariante par un changement du paramétrage de Γ.
2. Théorème de Poincaré V **dérive du potentiel** $f \overset{\text{déf}}{=} \Big(\exists f \in \mathcal{C}^1(U,E) \quad V = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\Big)$.
   Si U est convexe, V dérive d'au plus un potentiel à une constante additive près.
   U est **étoilé par rapport à** $a \overset{\text{déf}}{=} \forall x \in U \quad [a,x] \subset U$.
   U **est étoilé** $\overset{\text{déf}}{=}$ Il existe $a \in U$ tel que U soit étoilé par rapport à a.
   Tout convexe est étoilé par rapport à tous ses points.
   Théorème de Poincaré : Si U est étoilé et V de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors
   $$(V \textbf{ dérive d'un potentiel sur } U \iff \overrightarrow{\textbf{rot}}(V) = 0 \textbf{ sur } U).$$
   Si $V = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$, alors $\int_\Gamma \Omega = f(B) - f(A)$ où f est une primitive de Ω et A, B les extrémités de Γ. (V est à **circulation conservative**). En particulier, si Γ est fermé, $\int_\Gamma V(\overrightarrow{M}) \cdot \overrightarrow{dM} = 0$.
3. Théorème de Green-Riemann
   Soit $V =^t (P,Q)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $D \subset U$ de bord orienté Γ^+ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors :
   $$\int_{\Gamma^+} V(\overrightarrow{M}) \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{\Gamma^+} P \ \mathrm{d}x + Q \ \mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y.$$
   En particulier, $\int_{\Gamma^+} x \ \mathrm{d}y = \int_{\Gamma^+} -y \ \mathrm{d}x = \iint_D \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$ est l'aire de D.