2-1 - Dérivation des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Calcul de dérivées

1. **Calculer la dérivée d'ordre n de $x \mapsto e^x \cos x$.** O13-154
2. Calculer la dérivée d'ordre n de $x \mapsto \arctan x$. C4-005

Définitions - Théorème de Rolle - TAF - Prolongement d'une fonction $\mathcal{C}^1$

3. **Soit f dérivable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, $Df(a) > 0$ et $Df(b) > 0$. Prouver que : $\exists c \in]a,b[, \quad f(c) = 0$.** c4-046
4. **Soit $f(t) = t^n(1-t)^n$. Calculer les valeurs en 0 et 1 des dérivées $D^k f$ pour $k = 0..n$. Prouver que $D^n f$ s'annule en exactement n points de $]0,1[$.** C4-037
5. **Prouver que $\left(f : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}\right)$ admet un prolongement $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.**
6. Soit f continue et dérivable sur $]0,1[$ telle que $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{1^-} f = +\infty$. Prouver qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.
7. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}$. Prouver qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + \dfrac{(b-a)^2}{8} D^2 f(c)$.
8. Soit $(a,b,n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. Prouver que $x^n + ax + b$ a au plus 3 racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

Convexité

9. **Prouver que $\forall t \in [0, \pi/2[, \quad \dfrac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t \leq \tan t$.**
10. **Prouver que $\ln \ln$ est concave sur $]1, +\infty[$ et en déduire que $\forall (a,b) \in]1, +\infty[^2, \quad \ln \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{\ln a \ln b}$.**
11. Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Prouver que $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad a^{1/p} b^{1/q} + c^{1/p} d^{1/q} \leq (a+c)^{1/p} (b+d)^{1/q}$,
puis que $\forall (x,y) \in ((\mathbb{R}_+^*)^n)^2, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$.
Prouver que $x \mapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

2-2 - Intégrale d'une fonction $[a,b] \to \mathbb{R}$

Inégalités

1. **Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Prouver que $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_a^b f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t = 0$.**
2. **Soit f une fonction continue de $[0\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. A quelle condition a-t-on $\left|\displaystyle\int_0^1 f\right| = \int_0^1 |f|$? Même question pour f de $[0\ 1]$ dans $\mathbb{C}$.** C6-083
3. Soit f une fonction continue de $[a\ b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall k \in \{0..n\} \quad \displaystyle\int_a^b f(x)\, x^k \, \mathrm{d}x = 0$.
Démontrer que f s'annule et change de signe en au moins un point de $[a\ b]$ et que, si $p \in \{1..n\}$, il est impossible que f change de signe en exactement p points de $[a\ b]$. Conclusion ? C6-087

Sommes de Riemann

4. **Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k+n}{k^2+n^2}$.** O14-C262
5. **Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \big((n+1)(n+2)\dots(2n)\big)^{\frac{1}{n}}$.** O14-C261
6. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin \frac{k}{n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} \sin \frac{k}{n}$. Etudier $\lim u_n$ puis $\lim v_n$. c6-020

2-3 - Primitives d'une fonction continue $I \to \mathbb{R}$

Définition

1. **Soit $E = \{g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid g(0) = g(1) = 0\}$. On définit $h(x,y) = x(y-1)$ si $x \leq y$ et $h(x,y) = y(x-1)$ si $y \leq x$.**
   Montrer que $\phi = \left(x \mapsto \int_0^1 h(x,y)g(y)\ \mathrm{d}y\right)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et calculer ϕ' et ϕ''. O13-163
2. Montrer que $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\ \mathrm{d}t$, définie pour $x \neq 0$ est dérivable et déterminer sa limite quand x tend vers 0^+. O15-152

Calcul de primitives

3. **Calculer $\int \frac{\operatorname{ch} t}{e^t + 1}\ \mathrm{d}t$.**
4. **Calculer $\int \cos^2 x \sin^3 x\ \mathrm{d}x$ et $\int \cos^2 x \sin^4 x\ \mathrm{d}x$.**
5. **Calculer $\int_0^1 x \arctan^2 x\ \mathrm{d}x$.**
6. **Calculer $\int e^{\arcsin x}\ \mathrm{d}x$** C7-42
7. Soit f une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ sur $[\alpha,\beta]$. Calculer $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_\alpha^\beta f^{-1}(t)\ \mathrm{d}t$.

Formules de Taylor

8. **Encadrer sin sur $[0,\pi/4]$ par des polynômes de degré 3.**
9. **Soit f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.**
   Calculer $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}(f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a))$. O13-155
10. **Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{C})$. Prouver que $\int_a^b f^{n+1}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{n+1}(a+(b-a)u)(1-u)^n\ \mathrm{d}u$.**
    Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0,+\infty,\mathbb{R}_+)$ telle que toutes les dérivées de f soient à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Prouver que $\lim_{n\to\infty}\int_0^x f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Développements limités

11. **DL_3 en 0 de $f = x \mapsto \arctan(e^x)$.**
12. **$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.**
13. **$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.**
14. **$\lim_{x\to+\infty}[(1+\operatorname{ch} x)^a - (1+\operatorname{sh} x)^a]$.** O14-935
15. DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\frac{1}{\ln(\cos x)} + \frac{2}{\sin^2 x}$. *CCP* c2-010
16. Soit a, b, c réels non nuls.
    Etudier au voisinage de $+\infty$ l'application définie par $\varphi(x) = \left(\frac{1}{3}(a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x})\right)^x$. *CCP* c2-011
17. Trouver a, b, c, d tels que $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{cotan} x} + a + bx + cx^2 + dx^3$ soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible en 0. *CCP* c2-012

2-4 - Approximation

Suites définies par récurrence

1. **Etudier u définie par :**

   (a) $\forall n \geq 1,\ u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}$ (**n radicaux**).

   (b) $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n \ln|u_n|$ **et** $u_0 = 4$.

   (c) $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$ **et** $u_0 = 2$.

   (d) $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n \ln|u_n|$ **et** $u_0 = 1/4$. c1-092

2. Etudier (u_n) définie par $u_0 = 1,\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}\cdot$ O14-C259

Méthode de Newton

3. **Soit $f : t \mapsto t^5 - 2t^2 - t - 1$. Prouver que l'équation $f(t) = 0$ admet une racine et une seule α dans $\mathbb{R}_+$ et que $\alpha \leq 3$.**
   On applique la méthode de Newton itérée avec $u_0 = 3$. Prouver qu'elle converge vers α.