2-1 - Dérivation des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Thm de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^1$
Si f est continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$, alors

$$\big(f' \text{ a une limite } l \in \mathbb{K} \text{ en } a^+\big) \Rightarrow \big(f \in \mathcal{C}^1[a,b]\big) \qquad (\text{ et } l = f'(a))$$

f(t)	D^nf(t)
$t^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)t^{\alpha-n}$ ou $\dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}t^{\alpha-n}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \geq n$
$e^\alpha t,\ \alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha^n e^{\alpha t}$
$\cos(\alpha t),\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha^n \cos(\alpha t + n\frac{\pi}{2})$
$\sin(\alpha t),\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha^n \sin(\alpha t + n\frac{\pi}{2})$

2-2 - Intégrale d'une fonction $[a,b] \to \mathbb{R}$

Sommes de Riemann

Thm : Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$, alors la suite de terme général $u_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ est convergente de limite $\displaystyle\int_a^b f$.

2-3 - Primitives d'une fonction continue $I \to \mathbb{R}$

Thm fondamental de l'intégration
Si f est continue de I dans $\mathbb{K}$ et $a \in I$ alors $F = (x \mapsto \displaystyle\int_a^x f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$.

f(t)	F(t)
$t^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$	si $\alpha \neq -1$, alors $\dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, sinon $\ln\lvert t\rvert$
$e^{\alpha t},\ \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$
$\ln(t)$	$t\ln t - t$
$\cos t$	$\sin t$
$\sin t$	$-\cos t$
$\tan t$	$-\ln\lvert\cos t\rvert$
$\mathrm{cotan} t$	$\ln\lvert\sin t\rvert$
$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$	$\tan t$
$\dfrac{1}{\sin^2 t} = 1 + \mathrm{cotan}^2 t$	$-\mathrm{cotan} t$
$\dfrac{1}{\sin t}$	$\ln\left\lvert\tan\dfrac{t}{2}\right\rvert$
$\dfrac{1}{t^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{t}{a}$
$\dfrac{1}{1-t^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+t}{1-t}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin t$ ou $-\arccos t$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$\mathrm{argsh} t$ ou $\ln(t+\sqrt{1+t^2})$
$\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ si $t > 1$	$\mathrm{argch} t$ ou $\ln(t+\sqrt{t^2-1})$

Développement limité :

1. **Définition :**
   "f admet un DL$_n$ en 0" $\overset{\text{déf}}{=}$ "Il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(x) = P(x) + o_{x\to 0}(x^n)$"
   Si f admet un DL$_n$ en 0, alors **il est unique**.
   Pour que f admette un DL$_n$ en 0, **il suffit que** f soit de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur un voisinage de 0 et admette une dérivée d'ordre n en 0. Dans ce cas, le DL$_n$ est donné par la **formule de Taylor-Young**.
   Tout problème de DL peut (et doit, en général,) **se ramener à un problème en 0** par changement de variable.

2. **Formules :** $\exp(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + o(t^n)$ $\qquad (1+t)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)t^k}{k!} + o(t^n)$
   $\cos(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1})$ $\qquad (1-t)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k + o(t^n)$
   $\sin(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(t^{2n})$ $\qquad \ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} + o(t^n)$

3. **Opérations :**
   Combinaison linéaire, produit.
   Pour faire un quotient (par $1 + f(x)$ tel que $\lim\limits_{0} f = 0$), on multiplie (par $(1 + f(x))^{-1}$).
   Primitive (sans oublier la constante d'intégration), dérivée si on est sûr de l'existence de son DL.
   DL d'une fonction composée **de l'intérieur vers l'extérieur** :
   Par exemple, soit $f(x) = \exp(\sin(\ln(1+x)))$:
   $\ln(1+x) = ... \to_{x\to 0} 0$, donc $\sin(\ln(1+x)) = ... \to_{x\to 0} 0$, donc $f(x) = ...$
   On ne peut combiner que deux DL **du même ordre** (n) et on obtient un DL$_n$.
   Mais attention, l'ordre peut changer par :
   - **mise en facteur** :
     Avec $\operatorname{sh} x$ à l'ordre n, on a $x \operatorname{sh} x = x\left(x + x^3/6 + ... + o(x^n)\right) = x^2 + ... + o(x^{n+1})$ ie un DL$_{n+1}$.
   - **simplification** :
     Avec $\operatorname{sh} x$ à l'ordre n, on a $\dfrac{x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{x}{x + x^3/6 + ... + o(x^n)} = \dfrac{1}{1 + x^2/6 + ... + o(x^{n-1})} = ... + o(x^{n-1})$ ie un DL$_{n-1}$.
   - primitive (ordre $n \to n+1$) ; dérivée (ordre $n \to n-1$)

4. **Utilisation :** On cherche un équivalent et on n'y parvient pas directement (somme, ...)

2-4 - Approximation

Suite définie par récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. **Théorème du point fixe :** Si f est contractante d'un segment de $\mathbb{R}$ dans lui-même, alors f admet un point fixe unique et toute suite $u_0, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.

2. **Etude d'une telle suite dans un cas particulier :**
   - Représentation graphique et recherche de la limite **éventuelle** (C'est un point fixe de f si f est continue)
   - Déterminer un intervalle I **stable par** f contenant l'ensemble des termes de (u_n) sur lequel f est monotone.
   - Sens de variation :
     Si f est croissante, (u_n) est monotone et le sens de variation dépend du signe de la fonction $g : t \mapsto f(t) - t$.
     Si f est décroissante, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires et leurs sens de variation dépendent du signe de la fonction $h : t \mapsto f \circ f(t) - t$. Leurs limites éventuelles sont des points fixes de $f \circ f$.