1-1 - Suites de nombres réels

Ordre sur $\mathbb{R}$, sup et inf

1. **Soit A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.**
   Montrer que $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.
2. **Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante et $A = \{x \in [0,1] / f(x) \geq x\}$.**
   Montrer que A admet un maximum et que ce maximum est un point fixe de f.
3. Soit f et g deux applications bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrer que $M : u \in \mathbb{R} \mapsto \sup\limits_{x\in[0,1]} (f(x) + ug(x))$ est lipschitzienne.
   Calculer $M(u)$ pour $f = (t \mapsto \sin(\pi t))$ et $g = (t \mapsto \cos(\pi t))$. C3-039

Suites convergentes, divergentes

4. **Prouver que $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \Rightarrow (l \in \mathbb{Z}$ et u est stationnaire).**
5. Prouver que la suite $(\cos(na))$ est convergente si et seulement si $a = 0 \mod (2\pi)$.

Suites monotones, adjacentes

6. **Etudier la suite de terme général $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.**
7. **Etudier u définie par : $\forall n \geq 1 \quad u_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln n$.** c1-091
8. **Soit u et u définies par : $\forall n \geq 1 \quad u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$**
   Démontrer que u et u sont adjacentes. Soit e leur limite commune ; démontrer que e est irrationnel. c1-52
9. Etudier les suites (a_n) et (b_n) définies par $0 < a_0 < b_0$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} \end{cases}$ *CCP* O15-C196

Suites de nombres complexes

10. **Soit $Z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de terme général $Z_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.**
    Déterminer la limite de Z.
11. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\Phi(z) = \frac{z + |z|}{2}$.
    Etudier la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{C} \quad ; \quad u_{n+1} = \Phi(u_n)$. *Mines* C1-065

1-2 - Fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Ordre, parité, périodes

1. **Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Prouver que l'ensemble des périodes de f est un groupe additif.**

Limite, $\sim, o, O$

2. **Déterminer $\lim\limits_{x\to 1/2} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x$ et $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$.**
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{n!}{n! + x^n}$.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}\right)^x$ pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. *CCP* O15-C193

Fonctions continues

5. **Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f admet des limites dans $\mathbb{R}$ en $+\infty$ et $-\infty$.**
Prouver que f est majorée et minorée et que, pour tout $v \in]\inf_{\mathbb{R}} f, \sup_{\mathbb{R}} f[$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = v$.

6. **Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Prouver que f admet un point fixe.**

7. **Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & E(x) + \sqrt{x - E(x)} \end{array}$.**

8. Soit G l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $g(x + y) + g(x - y) = 2(g(x) + g(y))$. Soit $g \in G$.
   1. Montrer que $g(0) = 0$ et que g est paire.
   2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(nx) = n^2 g(x)$.
   3. Monter que $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g\left(\frac{p}{q}x\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 g(x)$.
   4. Déterminer G.

   CCP c3-031

Bijections continues

9. **Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$ notée x_n et étudier la suite de terme général x_n.**