1-1 - Suites de nombres réels

1. **Borne supérieure**

$$M=\sup(\mathcal{E}) \iff (\forall x\in\mathcal{E},\quad x\leq M) \text{ et } (\forall\varepsilon>0,\quad \exists x\in\mathcal{E},\quad x>M-\varepsilon)\,.$$

2. **Suite convergente**

$$l=\lim u_n \overset{\text{déf}}{=} (\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq n_0,\quad |u_n-l|\leq\varepsilon)\,.$$

3. **Suites monotones :** Etudier $u_{n+1}-u_n$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ou f telle que $u_n=f(n)$
Théorème de convergence : Soit (u_n) une suite réelle croissante ; (u_n) est convergente dans $\mathbb{R}$ si et seulement si (u_n) est majorée ; de plus, si (u_n) est convergente, alors $\lim u_n=\sup u_n$ et sinon $\lim u_n=+\infty$.

4. **Suites adjacentes :**
Définition : (u_n) et (v_n) sont adjacentes $\overset{\text{déf}}{=}$ (u_n) est croissante (resp.décroissante), (v_n) est décroissante (resp.croissante) et $\lim u_n=\lim v_n$.
Thm : Si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et $\lim(v_n-u_n)=0$, alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes .

1-2 - Fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. **Limite :**

$$l=\lim_a f \overset{\text{déf}}{=} (\forall\varepsilon>0,\quad \exists\alpha>0,\quad \forall x\in D_f,\quad |x-a|\leq\alpha\Rightarrow|f(x)-l|\leq\varepsilon)\,.$$

2. **Equivalents, o, O,... :**

   (a) **Définitions :**

$$f\underset{a}{\sim}g \overset{\text{déf}}{=} (f=gh \text{ et } \lim_a h=1) \quad (\text{ ou } \lim\frac{f}{g}=1)$$

$$f=o_a(g) \overset{\text{déf}}{=} (f=gh \text{ et } \lim_a h=0) \quad (\text{ ou } \lim\frac{f}{g}=0)$$

$$f=O_a(g) \overset{\text{déf}}{=} (f=gh \text{ et } \exists V\in\mathcal{V}(a),\ h \text{ est bornée sur } V) \quad (\text{ ou } \frac{f}{g} \text{ bornée sur } V\in\mathcal{V}(a))$$

   (b) **Formules :**

$$(\ln x)^a=o\left(x^b\right) \quad \text{si } a\in\mathbb{R} \text{ et } b>0 \quad (x\to\infty)$$

$$x^a=o\left(\exp(bx)\right) \quad \text{si } a\in\mathbb{R} \text{ et } b>0 \quad (x\to\infty)$$

$$\exp(an)=o(n!)\ (a\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad n!=o(n^n) \quad (\text{quand } n\to\infty)$$

$$x\underset{x\to0}{\sim}\sin(x)\underset{x\to0}{\sim}\text{sh}(x)\underset{x\to0}{\sim}\tan(x)\underset{x\to0}{\sim}\tanh(x)\underset{x\to0}{\sim}\arcsin(x)\underset{x\to0}{\sim}\arctan(x)$$

$$x\underset{x\to0}{\sim}\ln(1+x)\underset{x\to0}{\sim}e^x-1$$

$$1-\cos x\underset{x\to0}{\sim}\frac{x^2}{2}$$

$$n!\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$P(t)\underset{t\to\infty}{\sim}a_nt^n\ (n=deg(P))\ ;\ P(t)\underset{t\to0}{\sim}a_pt^p\ (p=val(P))$$

   (c) **Opérations :**

Produit, quotient :	$(f_1\sim g_1 \quad \text{et} \quad f_2\sim g_2)\Rightarrow(f_1.f_2\sim g_1.g_2 \quad \text{et} \quad \dfrac{f_1}{f_2}\sim\dfrac{g_1}{g_2})$
Puissance (constante) :	$(f\sim g \quad \text{et} \quad \alpha\in\mathbb{R})\Rightarrow(f^\alpha\sim g^\alpha)$
Inverse :	$(f=o(g)\Rightarrow\left(\dfrac{1}{g}=o(\dfrac{1}{f})\right)$

et de même pour O *.*
Corollaire : $\left(\dfrac{1}{x}\right)^b = o(\ln x)^a$ si $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$ $(x \to \infty)$
et $\exp(-bx) = o\,(x)^a$ si $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$ $(x \to \infty)$

Transitivité : $(f \sim g \quad \text{et} \quad g \sim h) \Rightarrow (f \sim h)$

et de même, transitivité de o *et* O *.*
De manière analogue :

$$(f = o(g) \quad \text{et} \quad g \sim h) \Rightarrow (f = o(h))$$

$$(f = O(g) \quad \text{et} \quad g \sim h) \Rightarrow (f = O(h))$$

Equivalent d'une fonction composée **de l'extérieur vers l'intérieur** dans certains cas :
Par exemple, soit $f(x) = \exp(\sin(\ln(1+x))) - 1$.

$$f(x) = e^u - 1,$$
$$\text{et} \quad \lim_0 u = 0 \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} u = \sin(\ln(1+x)) = \sin v,$$
$$\text{et} \quad \lim_0 v = 0 \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} v = \ln(1+x),$$
$$\text{donc} \quad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

Attention aux :
- sommes :

$$(f_1 \sim g_1 \quad \text{et} \quad f_2 \sim g_2) \not\Rightarrow (f_1 + f_2) \sim (g_1 + g_2).$$

  mais

$$(f_1 = o(f_2)) \Rightarrow ((f_1 + f_2) \sim f_2).$$

  Par exemple $\ln x = o(x^2)$ *donc* $x^2 + 2\ln x \sim x^2$ *(quand* $x \to \infty$*)*
- composition par $\exp, \ln, \sin, ...$:

$$f \sim g \not\Rightarrow \exp(f) \sim \exp(g).$$

- primitive, dérivée :

$$f \underset{0}{\sim} g \not\Rightarrow f' \underset{0}{\sim} g'.$$

(d) **Utilisation :**
On cherche une limite : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^3/5$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

3. **Fonction réciproque (thm de la bijection)**
Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$, alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$, J est un intervalle et $g = f^{-1}$ est continue sur J, strictement monotone et de même sens que f.