0-1 - Nombres complexes

Trigonométrie

1. **Prouver que $\mathrm{Vect}((t \mapsto \cos kt))_{0\leq k\leq n} = \mathrm{Vect}((t \mapsto \cos^k t))_{0\leq k\leq n}$.**
2. **Simplifier $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kx$.**
3. **Résoudre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (Z+i)^k (Z-i)^{n-k} = 0$.**
4. Résoudre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} = 0$.
5. Résoudre $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$ dans $\mathbb{C}$ O13-167

Géométrie

6. **Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que $|(1+i)z - 2i| = 2$.**
7. Soit $z \in \mathbb{C}$, A, B et C les points d'affixes z, z^2, z^3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que le triangle ABC soit un triangle rectangle. *Centrale* a3-003

0-2 - Géométrie plane

Repères

1. Soit $(D_i)_{1\leq i\leq 4}$ quatre droites deux à deux non parallèles et $(A_i)_{1\leq i\leq 6}$ leurs points d'intersection. Prouver que les milieux des "diagonales" sont alignés.

Droites

2. **Soit $(D_1 : 5x + y - 5 = 0)$ et $(D_2 : 3x + y - 4 = 0)$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $d(M, D_2) = 2d(M, D_1)$.**

Cercles

3. **Soit $(C_1 : x^2 + y^2 = 100)$ et $(C_2 : x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0)$. Prouver que (C_1) et (C_2) sont tangents et déterminer une équation de la tangente en leur point de contact.**

0-3 - Géométrie de l'espace

Repères

1. **Prouver que $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}^3)^3, \quad (a \wedge b) \wedge c + (b \wedge c) \wedge a + (c \wedge a) \wedge b = 0$.**
   Pour $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})^2$, on note $[A, B] = AB - BA$. Prouver que $[.,.]$ vérifie la même relation que $\wedge$.
2. Soit T un tétraèdre régulier de côté a. Montrer que pour tout point intérieur à T, la somme des distances aux faces est constante. Ce résultat demeure-t-il vrai en dimension 2 (c'est à dire dans un triangle équilatéral) ? *Centrale* b3-035

Droites et plans

3. **Déterminer des équations de la perpendiculaire commune à $(\Delta_1 : x+y+z = 4; x-y+z = 6)$ et $(\Delta_2 : x + y - z = 4; x + y + z = 2)$.**
4. **Calculer la distance du point $A(1, 2, 3)$ au plan d'équation $x + 2y + 3z + 1$, puis à la droite $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$.** O15-146
5. Soit deux droites, chacune intersection de deux plans, par exemple $\begin{cases} 3x + 5y - az = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x - 3y - 5z = 0 \\ bx + 2y - 37z = 24 \end{cases}$.
   Donner les conditions sur a et b pour que les deux droites soient parallèles ; donner les conditions sur a et b pour que les deux droites soient sécantes ; trouver dans ce cas le point d'intersection. *CCP* b3-27

Sphères

6. **Soit l'arc paramétré $(C : x = \cos t + \sqrt{3}\sin t; y = \cos t - \sqrt{3}\sin t + 1; z = -2\cos t + 1)$. Prouver que (C) est un cercle. Déterminer son centre, son rayon, son axe. Déterminer une équation de la sphère (S) passant par l'origine O contenant (C) et une équation du plan tangent en O à (S).**

0-4 - Fonctions usuelles

1. **Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+3k+3}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k-1}\sin^3 \frac{\alpha}{3^k}$.**
2. **Etude et courbe représentative de $f = (x \mapsto x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right))$.**
3. **Etude et courbe représentative de $f = (x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right))$.**
4. **Etude et courbe représentative de $f = (x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right))$.**

0-5 - EDO linéaires

EDO linéaires d'ordre 1

1. **Résoudre $xDy + y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.**
2. **Résoudre $xDy - 2y = x^3$.**
3. Pour les EDO ci-dessus, existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

4. **Résoudre $D^2y - Dy - 2y = x^2e^{-3x} + 3e^{-x}$.**
5. **Résoudre $D^2y - 4Dy + 5y = xe^{2x}\cos x$.**

0-6 - Coniques

1. **Etudier et construire $r = \dfrac{a}{1+\cos\theta}$, $r = \dfrac{a}{1+2\cos\theta}$, $r = \dfrac{a}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$.**
Pour chacune des courbes précédentes, déterminer une équation cartésienne implicite et une paramétrisation rationnelle.
2. $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormé du plan euclidien $\mathcal{P}$. γ est la courbe d'équation $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$. Reconnaître et tracer γ. (On donnera quelques éléments géométriques de γ) *CCP* b4-083