0-1 - Nombres complexes et trigonométrie

- **Développer :**
$$\begin{cases} \cos na = Re[(\cos a + i\sin a)^n] & \sin na = Im[(\cos a + i\sin a)^n] \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a & \sin 2a = 2\sin a\cos a \\ \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b & \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \end{cases}$$
- **Linéariser :**
$$\begin{cases} \cos^n a = \left(\dfrac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)^n & \sin^n a = \left(\dfrac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\right)^n \\ \cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a) & \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a) \\ \cos a\cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b)) & \sin a\sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)) \end{cases}.$$
De plus $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a-b)+\sin(a+b))$.
- **"Dé-linéariser" :**
$$\begin{cases} e^{i\theta}+1 = 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2) & e^{i\theta}-1 = 2ie^{i\theta/2}\sin(\theta/2) \\ e^{ia}+e^{ib} = 2\exp(i\dfrac{a+b}{2})\cos(\dfrac{a-b}{2}) & e^{ia}-e^{ib} = 2i\exp(i\dfrac{a+b}{2})\sin(\dfrac{a-b}{2}) \end{cases}.$$
D'où $1+\cos a = ...$, $\cos a+\cos b = ...$, $\sin a+\sin b = ...$,etc.
- **Avec tan :** $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.
$\tan(2a) = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $\cos(2a) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin(2a) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ en notant $t = \tan a$.
- **Equation $z^n = a$**
  - Si $a = r\exp(it)$, alors $z^n = a \iff z = \sqrt[n]{r}\exp\left(\dfrac{it}{n}+\dfrac{2ik\pi}{n}\right), k\in\mathbb{Z}$ et on obtient toutes les racines quand k prend n valeurs consécutives.
  - $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a^k = a^p\frac{1-a^{n-p+1}}{1-a}$. Application : les racines de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ sont les racines $n-$ièmes de 1 autres que 1.

0-2 - Géométrie plane

- $ux+vy+h = 0$ est une équation d'une droite D si et seulement si $(u,v)\neq 0_{\mathbb{R}^2}$. (u,v) est un vecteur normal à D, $(-v,u)$ est un vecteur directeur de D, $-\dfrac{u}{v}$ est le coefficient directeur de D si $v\neq 0$.
- D passant par $M_0 = (x_0,y_0)$ de vecteur directeur $V = (v_x,v_y)$ a pour équation
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & v_x \\ y-y_0 & v_y \end{vmatrix} = 0.$$
D passant par $M_0 = (x_0,y_0)$ de vecteur normal $N = (n_x,n_y)$ a pour équation
$$\begin{vmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_0 & -n_y \\ y-y_0 & n_x \end{vmatrix} = 0.$$
- La distance de $M = (x_M,y_M)$ à $D : ux+vy+h = 0$ est $d = \dfrac{|ux_M+vy_M+h|}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

0-3 - Géométrie de l'espace

- $ux+vy+wz+h=0$ est une équation d'un plan P si et seulement si $(u,v,w)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$. (u,v,w) est un vecteur normal à P
- P passant par $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ de vecteur normal $N=(n_x,n_y,n_z)$ a pour équation $\begin{vmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} = 0$.
- La distance de $M=(x_M,y_M,z_M)$ à $P: ux+vy+wz+h=0$ est $d=\dfrac{|ux_M+vy_M+wz_M+h|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$.
- Soit $P_1: u_1x+v_1y+w_1z+h_1=0$ et $P_2: u_2x+v_2y+w_2z+h_2=0$ deux plans sécants selon une droite D.
  $V=\begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de D.
  $\|\overrightarrow{MA}\wedge V\|$ permet de trouver la distance de M à D (A étant un point de D).
  Si D' est une autre droite, $(A,V,V\wedge V')$ et $(A',V',V\wedge V')$ sont deux plans passant par leur perpendiculaire commune, $\det(\overrightarrow{AA'},V,V')$ permet de trouver la distance de D à D'.

0-4 - Fonctions usuelles

1. **Dérivation des fonctions usuelles**

f(t)	Df(t)
$t^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{C}$	$\alpha t^{\alpha-1}$
$e^{\alpha t},\ \alpha\in\mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha t}$
$\ln(\lvert t\rvert)$	$\dfrac{1}{t}$
$\cos t$	$-\sin t$
$\sin t$	$\cos t$
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t$
$\mathrm{cotan} t$	$-\dfrac{1}{\sin^2 t}=-\left(1+\mathrm{cotan}^2 t\right)$
$\arctan t$	$\dfrac{1}{t^2+1}$
$\arcsin t$ ou $-\arccos t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

2. **Etude d'un arc** donné par $y=f(x)$: $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{u_x}+f(x)\overrightarrow{u_y}$.

   (a) Etude globale
   - Ensemble D_f de définition : $x\in D_f \iff f(x)$ existe, par équivalence (ou à défaut double implication).
   - Ensemble d'étude :
     Période de f.
     Parité de f.
     $\forall x\in D_f,\quad f(a+x)=\pm f(a-x)$.
   - Variations et limites.

   (b) Etude locale
   - Tangente

     En un point régulier $M(x_0)$ où f est dérivable, la tangente est la droite $(M(x_0),\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}x}(x_0))$.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}x}(x_0)=\overrightarrow{u_x}+f'(x_0)\overrightarrow{u_y}.$$

Equation de la tangente :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & 1 \\ y - f(x_0) & f'(x_0) \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

– *Branche infinie* : $\lim\limits_{x \to x_0} \|\overrightarrow{OM(x)}\| = +\infty$ où $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Il y a une *direction asymptotique* de pente a si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{y(x)}{x} = a$.
Il y a une *asymptote* d'équation $y = ax + b$ si $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) - a\,x = b$
Il y a une *branche parabolique* de pente a si $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) - ax = \pm\infty$.
Point limite : $A = (x_0, y_A)$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} \overrightarrow{OM(x)} = \overrightarrow{OA}$.
$\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - y_A}{x - x_0}$ donne le coefficient directeur de la tangente éventuelle.

0-5 - EDO linéaires

1. **D'ordre 1** $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ où a et b sont continues sur I.
   – Résolution de l'EH : $x'(t) = a(t)x(t) \iff x = (t \mapsto K \exp(A(t)))$ où K est une constante de $\mathbb{C}$ et A une primitive sur I de a.
   – Solution particulière par 'Variation de la constante' en cherchant $K = (t \mapsto K(t))$ ($K \in \mathcal{C}^1(I)$ est définie par $K'(t) = ...$)
2. **D'ordre 2** $x''(t) = a_1 x'(t) + a_2 x(t) + b(t)$ où $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ et b est continue sur I.
   – Résolution de l'équation caractéristique (EC : $r^2 = a_1 r + a_2$) (racines : r_1, r_2)
   – Résolution de l'EH : $\begin{cases} \text{si } r_1 \neq r_2 & x = \left(t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}\right) \\ \text{si } r_1 = r_2 & x = \left(t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_1 t}\right) \end{cases}$
   – Recherche d'une solution particulière x_1 :
     – si $b(t) = e^{\alpha t} P(t)$ où $P \in \mathbb{C}[t]$ (polynôme) et $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$x_1(t) = t^k e^{\alpha t} Q(t) \text{ où } (Q \in \mathbb{C}[t]\ ;\ \deg(Q) = \deg(P)) \text{ et } \begin{cases} k = 0 & \text{si} & k \text{ n'est pas racine de } EC \\ k = 1 & \text{si} & k \text{ est racine d'ordre 1 de } EC \\ k = 2 & \text{si} & k \text{ est racine d'ordre 2 de } EC \end{cases}$$

     – Méthode de superposition si $b(t) = b_1(t) + b_2(t) + ...$ où les b_i sont du type envisagé ci-dessus.

0-6 - Coniques

1. $F(x, y) = 0$ où F est polynomiale de degré 2
   – Le centre éventuel est solution de $\overrightarrow{grad} F = 0_{\mathbb{R}^2}$
   – Equations réduites
     – Hyperbole : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; asymptotes : $\dfrac{x}{a} = \pm \dfrac{y}{b}$; $c^2 = a^2 + b^2$
     – Parabole : $x^2 = 2py$; foyer : $(0; p/2)$; directrice $y = -p/2$
     – Ellipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $c^2 = a^2 - b^2$
2. $r = \dfrac{p}{1 + e \cos\theta}$ L'origine est un foyer.
   Le type est donné par le nombre de solutions dans $]0, 2\pi[$ de $1 + e\cos\theta = 0$.