Concours Communs Polytechniques – option PC

Planche 173 II abordable dès la 1re année

I) Soit $f \in \mathcal{L}(E)\backslash\{0\}$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, vérifiant $f^3+f=0$. On écrit : $\forall x \in E$, $\exists (y,z) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Ker}(f^2+Id)$ tels que $x=y+z$; montrer que $y=x+f^2(x)$ et $z=-f^2(x)$.
Montrer que $E=\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2+Id)$.
Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(f^2+id) \geqslant 1$ et que si $x \in \operatorname{Ker}(f^2+id)\backslash\{0\}$, $\big(x, f(x)\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2+id)$. Que vaut $\det(-Id)$?
En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(f^2+id)=2$.
Trouver une base dans laquelle $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est matrice de f.
Trouver les $g \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec f et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2=f$.
II) Trouver les limites de $f(x)=(\tan x)^{\tan(2x)}$ en 0^+, $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}^-$.

Planche 174 I abordable dès la 1re année

I) Soient D la droite d'équation $x+y-1=0$ dans le plan usuel, P la parabole de foyer $O(0,0)$ et de directrice D. Donner un vecteur normal à D et la distance d'un point $M(x,y)$ à D.
Soit $M(x,y) \in P$. Montrer que $x+y-1 \leqslant 0$.
En coordonnées polaires, montrer que $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}\big(1+\cos(\theta-\frac{\pi}{4})\big)}$.
Montrer qu'une équation de P est $x^2+y^2-2xy+2x+2y-1=0$.
Soit $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2-2xy+2x+2y-1 \leqslant 0\}$.
Montrer que la surface $A_\Delta = \displaystyle\iint_\Delta \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vaut $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/4} \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$.
Exprimer A_Δ en fonction de $\tan\dfrac{\pi}{8}$.
II) Résoudre l'équation différentielle $(x^2-1)y''-6y=0$.

Planche 175 II abordable dès la 1re année

I) Montrer que si A est diagonalisable, A^2 l'est aussi.
En s'intéressant à la matrice qui a un unique 1 dans le coin supérieur droit et des 0 partout ailleurs, montrer que la réciproque est fausse.
Condition de diagonalisabilité utilisant le polynôme annulateur ?
Montrer que A^2 diagonalisable et A inversible $\Rightarrow$ A diagonalisable.
On suppose A non inversible. Montrer que si A^2 et A sont diagonalisables, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$.
II) Donner le développement de Taylor avec reste intégrale de $\exp x$ sur $[0,1]$. Limite de la suite de terme général $u_n = n\sin(2\pi n!\mathrm{e})$.

Planche 176

I) Soit f un endomorphisme bijectif d'un espace euclidien E, vérifiant $\forall (x,y)\in E^2$, $\big(f(x)|y\big) = -\big(x|f(y)\big)$.
Montrer que $s=f\circ f$ est symétrique.
Soit a l'une de ses valeurs propres et V_a le sous-espace propre associé ; montrer que $\forall x \in V_a\backslash\{0\}$, x et $f(x)$ sont orthogonaux.
Montrer que $\big(s(x)|x\big) = a\,\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$ et en déduire $a<0$.
Montrer que $F=Vect\big(x,f(x)\big)$ et $F^\perp$ sont stables par f.
Montrer que l'endomorphisme induit sur F par f a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} -b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, où l'on précisera b.
En déduire que E est de dimension paire.
II) Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t$.

Planche 177

I) Représenter $Q=]0,+\infty[^2$ et $Q'=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ |v|<u\}$. Montrer que φ, définie sur Q par $\forall (x,y)\in Q^2$, $\varphi(x,y)=(y^2+x^2, y^2-x^2)$ est une bijection de Q dans Q'. Trouver φ^{-1}.
Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de Q dans Q'.
Soit f de classe C^1 de Q dans $\mathbb{R}^2$, vérifiant :
$$x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy \quad (1)$$
Quelle équation différentielle doit vérifier $\tilde{f}$, telle que $\tilde{f}\circ\varphi = f$, pour que f soit solution de (1) ? La résoudre et en déduire f.
II) $A=\begin{pmatrix} -7 & -12\\ -3 & -5\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
Pour quelle(s) valeur(s) de $a\in\mathbb{R}$, $U=\begin{pmatrix} a\\ 1\end{pmatrix}$ est-il vecteur propre de A ? Soit $P=\begin{pmatrix} -2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, clairement inversible. Dire, sans calcul, à quoi ressemble $P^{-1}AP$. Donner la première colonne de cette matrice.

Planche 178 II abordable dès la 1re année

I) Pour $f \in E$, espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose $u(f)(x)=\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$ et on note $h_a(t)=\mathrm{e}^{at}$.
Montrer que $u(h_0)=h_0$ et que, pour $a\in\mathbb{R}^*$, $u(h_a)=\lambda_a h_a$ où λ_a est un réel qu'on exprimera en fonction de a.
Montrer que $u(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer $u(f)'$.
Montrer que u est un endomorphisme de E dont le noyau est constitué des fonctions 1-périodique vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0$.
Montrer que les $\cos(2k\pi t)$ sont dans $\operatorname{Ker} u$; est-il de dimension finie ? u est-elle surjective ? Trouver les valeurs propres de u.
II) Projection orthogonale de $M(x,y,z)$ sur D : $\begin{cases} x=1+t\\ y=2+t\\ z=-t\end{cases}$.

Planche 179 I abordable dès la 1re année

I) Soit $P_n(X)=-4+\displaystyle\sum_{k=1}^n X^k$; montrer que l'équation $P_n(X)=0$ admet une unique solution strictement positive notée x_n.
Calculer x_1 et x_2, puis montrer que $x_5<1$.
En calculant $P_{n+1}(x_n)$, montrer que (x_n) est monotone et en déduire qu'elle converge vers une limite a.
Montrer que, pour $n\geqslant 1$, $x_n^{n+1}-5x_n+4=0$ et en déduire a.
Pour $n\geqslant 1$, montrer que $x_n-a=\dfrac{1}{5}\,x_n^{n+1}$ et en donner un équivalent.
II) A, carrée d'ordre n, de diagonale nulle et dont tous les autres coefficients valent 1, est-elle diagonalisable ?
Calculer $(A+I_n)^2$ et en déduire la valeurs propres possibles de A. Le sont-elle réellement ?

Planche 180 II abordable dès la 1re année

I) Pour $x\in]-1,1[$, on pose $f_x(\theta)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\cos(n\theta)}{n}$ où $\theta\in\mathbb{R}$.
Prouver que $f_x(0)$ et $f_x(\pi)$ sont définis et calculer leur valeur.
Montrer que f_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f_x dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f_x'(\theta)=-\dfrac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$.
En déduire la valeur de $f_x(\theta)$ pour $x\in]-1,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
En déduire, pour $x\in]-1,1[$, la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta$
et, pour $x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$, la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta$.
II) Soit E un ensemble, et f une application de E dans E.
On suppose que f est surjective. Montrer que $f\circ f$ est surjective.
On suppose que $f\in L(E)$ vérifie $f=f\circ f\circ f$.
Montrer que f est surjective si et seulement si elle est injective.

Planche 181

I) Montrer que la courbe C de paramétrage $\begin{cases} x=\sin(2t)\\ y=1-\cos(2t)\\ z=2\cos t\end{cases}$ est incluse dans une sphère dont on précisera le rayon.
Montrer qu'elle est incluse dans la surface d'équation :
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ si et seulement si $a=0$, $b=R=1$.
II) Convergence de la série de terme général $\ln(\operatorname{th} n)$.

Planche 182

I) On dit que $A\in\mathcal{M}_n(K)$, où $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, vérifie (P) si $\exists M\in\mathcal{M}_n(K)$, $\forall\lambda\in K$, $\det(M+\lambda A)\neq 0)$.
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre et en déduire $\exists\lambda\in\mathbb{C}$, $\det(M+\lambda I_n)=0$.
Calculer $\det(I_n+\lambda T)$ où T est triangulaire supérieure de diagonale nulle et en déduire que T vérifie (P).
Calculer le rang de $T_r=\begin{pmatrix} 0 & I_r\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(K)$.
Soient A vérifiant (P) et B de même rang que A ; montrer que $\exists (P,Q)\in GL_n(K)^2$, $B=PAQ$ et en déduire que B vérifie (P).
Montrer que les matrices non inversibles vérifient (P).
Montrer que les matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ne vérifient pas (P). Étudier le cas $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on distinguera n pair et n impair).
II) Montrer que $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arc}\tan(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ puis la calculer.

 © MMXI Éditions Officiel de la Taupe Gyroscope