

1. (a) On considère la problème de Cauchy linéaire : $(PC) \quad D^2y = b y + c; y(t_0) = y_0; Dy(t_0) = m_0$, où b, c sont des fonctions continues d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et $t_0 \in I$.
Ecrire (PC) sous "forme intégrale".
- (b) Soit $(E1) \quad D^2z = a_1 Dz + b_1 z + c_1$, où $(a_1, b_1, c_1) \in (\mathcal{C}(I, \mathbb{C}))^3$. Déterminer un changement de fonction inconnue $z \mapsto y$ tel que z est solution de $(E1) \iff y$ est solution de $(E2) \quad D^2y = b_2 y + c_2$, où $(b_2, c_2) \in (\mathcal{C}(I, \mathbb{C}))^2$.
2. Calculer $\iiint_D \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}}$ où $D = \{(x, y, z) / \frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 \leq a^2\}$. E5-50
3. Calculer le volume intérieur à l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
4. Calculer l'aire d'un ellipsoïde de révolution.
-
5. Soit \star définie par $\forall t \in \mathbb{R} \quad (f \star g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$. Démontrer que \star est commutative et associative sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
-
6. Calculer $\iint_{\mathcal{D}} \exp\left(\frac{y}{x+y}\right) dx \, dy$ où $\mathcal{D} = \{M = (x, y) / 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1-x\}$.
On utilisera le changement de variable $(u = \frac{y}{x+y}, v = y)$. e5-022
7. Soit $I_a = \iint_{T_a} \sqrt{xy} e^{-x-y} dx \, dy$ où $T_a = \{(x, y) / x \geq 0; y \geq 0; x+y \leq a\}$.
Calculer I_a ; on pourra utiliser le changement de variable $(u = x+y, v = x)$.
Etudier $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_a$. E5-40
8. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$ et $f \in \mathcal{C}^4(A, \mathbb{R})$. Calculer $\iint_A xy \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) dx \, dy$. E5-31
9. Déterminer f pour que $\Omega = f(y)[dx + \frac{y-x}{y} dy]$ soit exacte et déterminer ses primitives. f6-066
10. Calculer l'aire du bord du domaine $(x^2 + y^2 \leq a^2; y^2 + z^2 \leq a^2; z^2 + x^2 \leq a^2)$. f5-049