1. **Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g(x,y) = \int_0^y (x-t)f(t)\,dt$. Prouver que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa différentielle.** e1-2
2. **Montrer que l'application définie par $f(X) = X^2$ sur $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et déterminer sa différentielle.** e1-45
3. **Déterminer les extrema de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.** e2-036
4. **Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f_{a,b} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + a\sin y, y + b\sin x) \in \mathbb{R}^2$.**
   Montrer que $f_{a,b}$ est surjective. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que $f_{a,b}$ soit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. E1-51

---

5. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :* $\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+ & (x,y) \in D_f \Rightarrow (tx,ty) \in D_f \\ \forall t \in \mathbb{R}^+ & f(tx,ty) = t^k f(x,y) \end{cases}$
   f est dite k-positivement homogène.
   (a) *Démontrer que, si f est k-positivement homogène et de classe $\mathcal{C}^1$, alors :*
   $$\forall (x,y) \in {D_f}^2 \quad xD_1f(x,y) + yD_2f(x,y) = kf(x,y)$$
   Etudier la réciproque.
   (b) *Démontrer que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors : D_1f et D_2f sont $(k-1)-$ positivement homogènes. Etudier la réciproque.* e2-060b

---

6. f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit une fonction G_n de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :
   $$G_n(x,y) = \int_0^y f(u)\frac{(x-u)^n}{n!}du$$
   Démontrer que G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle. E1-9
7. On approche la solution de $(Dy = f(t,y), y(t_0) = y_0)$ pour $h \in \mathbb{R}^*$ fixé par la suite
   $$\forall n \geq 0 \quad t_{n+1} = t_n + h \ , \ y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h/2, y_n + \frac{h}{2}f(t_n,y_n)).$$
   On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Déterminer un DL_3 quand $h \to 0$ de $y(t_1) - y_1$.
   On suppose que $h = \dfrac{1}{p}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un majorant de $y(t_p) - y_p$. e1-41
8. Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ une fonction harmonique et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad D^2f(t) \neq 0$.
   A quelle condition $f \circ g$ est-elle harmonique ? E1-18
9. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $\psi(x,y) = \dfrac{g(y,x) - g(x,y)}{y-x}$ si $x \neq y$.
   Démontrer que ψ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
   En déduire la valeur de $\zeta(a) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} \dfrac{x^y - y^x}{e^{x/y} - e^{y/x}}$. E1-48
10. Soit $f(x,y) = \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq [0,0)$. f admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$? Ce prolongement est-il de classe $\mathcal{C}^1$? E1-14
11. Soit f la fonction de $(]0,+\infty[)^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2}{2y}, \dfrac{y^2}{2x}\right)$.
    Etudier l'existence d'une fonction réciproque f^{-1} et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 après avoir démontré leur existence. E1-20
12. Déterminer un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi : (x,y) \mapsto (x-y, xy)$ soit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$. E1-50
13. Soit le carré de $\mathbb{R}^2$ donné par $[0,1]^2$ de diagonale Δ et $f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{si } x \geq y \end{cases}$. Montrer que f admet un maximum sur le carré en un seul point à préciser. *Mines* e2-007
14. Déterminer les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle donné. e2-032
15. Quel est le pavé de volume maximal dont la somme des longueurs des arêtes est L ? dont la somme des aires des faces est A ? e2-057
16. M et M' décrivent respectivement deux cercles tangents extérieurement en O. Quelle est l'aire maximale du triangle (O,M,M') ? *Centrale* E2-67