1. **Résoudre : $(a)$ $\quad D^2y+4y=\cos^2 x$ et : $(b)$ $\quad D^2y+4y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$** E4-124
2. **$f$ est solution du problème de Cauchy $\left(y"+(\cos t)y=e^{t^2}\ ;\ y(0)=1\ ;\ y'(0)=0\right)$. Prouver que $f$ est paire.**
3. **Résoudre $D^2y-\tan t Dy+2y=0$ sur $]0,\pi/2[$**
   **- en remarquant que $(y_0 : t\mapsto \sin t)$ est une solution particulière,**
   **- en utilisant le Wronskien de $(y,y_0)$.** e4-102
4. **Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $A_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. On considère l'équation différentielle : $(E)$ $\quad \begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}=A_{\alpha,\beta}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$**

   **Déterminer la solution générale de $(E)$ quand $(\alpha,\beta)$ prend les valeurs suivantes :**

   $$(1,6);(3,2);(4,-1);(2,-1)$$

   **Dans chaque cas, représenter la trajectoire correspondant à la condition initiale $(x(t_0),y(t_0))=(x_0,y_0)$** E4-122
5. **Résoudre $x^2D^2y+3xDy+y=1+x^2$ sur $I_1=\mathbb{R}_-^*$ puis sur $I_2=\mathbb{R}_+^*$ en utilisant les changements de variable $t\mapsto x=\pm\exp(t)$.** e4-027
6. **Soit $(E)$ $\quad Dy=e^y-x$.**
   **Résoudre $(E)$ en utilisant la fonction $z=e^{-y}$. Représenter la solution vérifiant $y(0)=1$.** e3-84
7. **Résoudre $x=Dy+\sin(Dy)$ ; on utilisera le paramétrage $t=Dy$.** E3-65

---

8. *Soit $y$ (resp $z$) une solution de $D^2y(t)+\phi_1(t)y(t)=0$ (resp $D^2z(t)+\phi_2(t)z(t)=0$) où $\phi_1$ (resp $\phi_2$) est une fonction réelle continue sur $[a,+\infty[$. On suppose que $\forall t\geq a \quad \phi_1(t)\geq\phi_2(t)$.*
   *Prouver qu'entre deux zéros de $z$, il existe un zéro de $y$.*
   *Application : $J_0$ est solution de $(xy"+y'+xy=0\ ;\ y(0)=1\ ;\ y'(0)=0)$ ; étudier ses zéros.* E4-149
9. *Soit $y$ une solution de $D^2y(t)+\phi(t)y(t)=0$ où $\phi$ est une fonction réelle continue sur $I$ telle que $y$ s'annule en un point $a$ de $I$ mais $y$ n'est pas la fonction nulle. Prouver que : $\exists\alpha>0 \quad \forall t\in[a-\alpha,a+\alpha]\setminus\{a\} \quad y(t)\neq 0$.*
   *(ie les zéros de $y$ sont "isolés")* E4-150
10. *Soit le système différentiel $\left(\dfrac{dx}{dt}=2(x-ty)\ ,\ \dfrac{dy}{dt}=2y\right)$.*
    *Résoudre $(E)$.*
    *On utilise la méthode d'Euler avec un pas $h$ de $t=t_0=0$ à $t=t_n=nh$ pour trouver la courbe intégrale qui passe par le point $(x_0,y_0)$ à l'instant $t=0$. Calculer explicitement $(x_n,y_n)$ en fonction de $x_0,y_0,n,h$ et vérifier la convergence de la solution approchée vers la solution exacte quand $n\to+\infty$.* e3-85

---

11. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a$ une fonction continue sur $I$ et $b$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annulant pas sur $I$. Trouver une condition nécessaire sur $a$ et $b$ pour que $(E)$ : $\ y"+ay'+by=0$ admette des solutions inverses l'une de l'autre. Cette condition est-elle suffisante ?
    Application numérique : résoudre $4xy"+2y'-y=0$. Existe-t-il des solutions $\mathcal{C}^\infty$ ?
    Existe-t-il des solutions de $(E)$ développables en série entière ? *Centrale* e4-001
12. Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y"+|y|=0\\ y(0)=a\\ y'(0)=0\end{cases}$ On distinguera $a<0, a>0$ et $a=0$. *Centrale* e4-005
13. Soit $(E)$ $(1-t^2)y"-ty'-a^2y=0$. Résoudre $(E)$ en remarquant que $t\mapsto\exp(a\arctan t)$ est une solution. E4-11
14. Soit $(E)$ $(t+1)y"-2y'-(t-1)y=te^{-t}$. Résoudre en vérifiant que $t\mapsto e^t$ est une solution de l'équation sans second membre. E4-36
15. Déterminer les fonctions $f$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

    $$\forall x\in\mathbb{R} \quad \frac{x}{3}(f(x)+2f(0))=\int_0^x f(t)\,dt$$

    E4-19
16. Résoudre $(a)$ $\quad D^2y-2Dy-3y=\dfrac{\exp(3x)}{\operatorname{ch}^2 x}$ $\qquad (b)$ $\quad D^2y+3Dy+2y=\dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$. e4-144

17. Résoudre l'équation différentielle $y" + y' + y = \varphi$ où $\varphi$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donnée.
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f"(x) + f'(x) + f(x)) = 0$.
Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$. e4-134

18. Soit $(E)$ $\quad D^2y + e^{-t^2}y = \sin t$ et $f$ une solution réelle sur $I = [0, +\infty[$ de $(E)$.
Démontrer que, si $f$ est bornée sur $I$ et de carré intégrable sur $I$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
On pourra étudier l'intégrabilité sur $I$ de $D^2f - \sin$. e4-132

19. Soit $(E)$ $D^2y + e^x y = 0$ ; prouver que toutes les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
Généralisation à une équation $D^2y + f(x)y = 0$ ? e4-151

20. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x" = x - \dfrac{15}{4}y' + e^{2t} \\ y" = -y - x' \end{cases}$.
On pourra éventuellement se ramener à un système de premier ordre. *Centrale* e4-003

21. Résoudre $x = \left(\dfrac{Dy-1}{Dy+1}\right)^2$ en paramétrant avec $t = Dy$. E3-73

22. Soit $(E)$ : $y' = \dfrac{x+y+a}{x-y+b}$.
Déterminer une transformation du type $(x, y) \mapsto (X = x + \beta, Y = y + \alpha)$ telle que $(E)$ soit équivalente à $Y' = \dfrac{X+Y}{X-Y}$. Résoudre $(E)$. e3-032