1. **Domaines de convergence des séries $\sum n^\alpha z^n$, $(\sqrt[n]{n}-1)z^n$, $\sum \dfrac{(2n)!z^{2n}}{n!n^n}$.**
2. **Domaine de convergence et somme des séries entières $\sum \dfrac{x^n}{2n+1}$, $\sum \dfrac{2\operatorname{sh} n}{n(n+1)}z^n$, $\sum \dfrac{z^{3n}}{(3n)!}$, $\sum \dfrac{n^2+4n-1}{n+4}\dfrac{z^n}{n!}$ et $\sum(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k})t^n$.** d3-118
3. **Prouver que $\ln 2 = \sum_{1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.**
4. **Soit $f(t) = \dfrac{1}{e^t-1} - \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^*$. Prouver que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.** d3-140
5. **Démontrer que $\int_0^1 \dfrac{\ln t \ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3}$.** D2-027
6. **Recherche des solutions développables en série entière de $t^2D^2y + 6tDy + (6-t^2)y = -1$.**
7. **Développer en série entière $f(t) = \ln(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})$.** d3-044

---

8. *Domaine de convergence de la série $\sum n!z^{n^2}$.* D3-3
9. *Comparer les rayons de convergence et les sommes des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum s_n z^n$ où $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.* D3-82
10. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite $a \neq 0$.*
    (a) *Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n}t^n$.*
    (b) *On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n}t^n \quad (t\in\mathbb{R})$. Calculer $\lim_{t\to 1^-}\dfrac{f(t)}{\ln(1-t)}$* D3-130
11. *Soit : $f_1(x) = \sum_{n\geq 0} e^{-n}\cos(n^2x)$ et $f_2(x) = \sum_{n\geq 0}\dfrac{\cos 2^n x}{n!}$.*
    Montrer, pour $i\in\{1,2\}$, que $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que sa série de Mac-Laurin est de rayon de convergence nul. D3-124

---

12. Domaine de convergence de $\sum \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}z^n$. d3-001
13. Etudier la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(\operatorname{ch}\frac{1}{n})^{n^\alpha}}$, où α est un réel donné. *CCP* d3-020
14. Domaine de convergence de la série $\sum n^{\ln(n)}z^n$. Même question pour $\sum n^{\sqrt{n}}z^n$. D3-8
15. Domaine de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où a_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de π. D3-80
16. Soit $\varphi(x) = xe^{-x}$, $u_n = \varphi(n)$, $v_n = \varphi(-n)$, $w_n = \varphi(1/n)$.
    Convergence et somme éventuelle de $\sum u_n, \sum v_n, \sum w_n$. d3-110
17. Soit $f = x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$. Prouver que f admet un DL_n en 0. On le note $f(x) = a_0+...+a_nx^n+o(x^n)$.
    Exprimer a_n en fonction des $a_i, i\leq n-1$. Prouver que $\forall n\ |a_n|\leq 1$.
    Soit $\Phi(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$. Prouver que Φ est définie sur un voisinage V de 0 et que $\Phi = f$ sur V. d3-106
18. Soit $(a_n)\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $(a_{n+1}-a_n)$ décroit. Démontrer que $R_{\sum a_n z^n}\geq 1$. D3-138
19. Rayon de convergence et somme de $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$? *CCP* d3-024
20. Soit $\sum a_n x^n$ la série entière telle que $a_n = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}, n\in\mathbb{N}$. Donner l'intervalle de convergence I de la série entière.
    Calculer la somme de la série entière. Trouver les coefficients du développement en série entière de la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$. *CCP* d3-019

21. Prouver que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

22. Soit (u_n) définie par $(u_0 = u_1 = 1\ ,\ \forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n)$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n x^n$.

    Montrer que le rayon de convergence de S est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{2}$.
    Calculer $S(x)$; en déduire une expression de u_n. D3-136

23. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1; \quad \forall n \geq 2, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)}$$

    Etudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
    Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?
    Trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction f somme de la série entière. En déduire f. D3-137

24. Développer en série entière $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$. d3-122

25. Déterminer les solutions développables en série entière de $(1+x^2)D^2y - 2y = 0$. D3-57

26. Soit l'équation $(E) \quad (1-x^2)Dy - xy = 2$.
    Démontrer que (E) admet une solution impaire développable en série entière.
    Résoudre directement (E) sur $]-1,1[$.
    En déduire le développement en série entière de $x \mapsto (\arcsin x)^2$. d3-088

27. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$.

    Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, et solution de l'équation différentielle $Dy + xy = 1$.
    Déduire de ce qui précède le développement en série entière de f. d3-090