1. **Série de Fourier de la fonction "créneau".**
2. **Série de Fourier de la fonction$t \mapsto \exp(-iat)$ sur $[0, 2\pi[$, f $2\pi-$périodique.**
3. **Soit $a > 0$, fixé, déterminer le développement en série de Fourier de $f(t) = \dfrac{1}{\cos t + \operatorname{ch} a}$ (pour calculer $a_n(f)$, poser $z = e^{it}$).** *Mines* d4-16
4. **Déterminer toutes les fonctions f, $2\pi-$périodiques et de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :**

$$\int_0^{2\pi} f = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |f"(t)| \le |f(t)|$$

D4-45

5. **Déterminer toutes les solutions $2\pi-$périodiques de l'équation différentielle $y" + ye^{it} = 0$. Même question pour $y" + 4y = \sin t$ puis $y" + 4y = |\sin t|$.** d4-039

---

6. *Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Prouver que l'ensemble des périodes de f est un groupe additif et que, si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ admet a et b pour périodes avec $a/b \notin \mathbb{Q}$, alors f est constante.*
   On pourra calculer de deux manières $\displaystyle\int_0^a f(t) \exp(-\frac{2i\pi}{a} t)\ dt$
7. *On appelle "produit de convolution" de deux fonctions f et g continues par morceaux et $2\pi-$périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ la fonction notée $f \star g$ définie par :*

$$\forall t \in R \quad (f \star g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) g(t-u) du$$

   (a) *Démontrer que $f \star g$ est $2\pi-$périodique ; que peut-on dire de la parité de $f \star g$ si f et g sont de même parité ? (resp. de parités opposées ?)*
   (b) *Démontrer que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f \star g) = c_n(f) c_n(g)$*
   En déduire l'expression des coefficients trigonométriques de $f \star g$ en fonction de ceux de f et g. D4-41

---

8. Soit la fonction F $2\pi-$périodique définie par :

$$t \in [-\pi, 0] \mapsto \cos(t + \pi/4)$$
$$t \in [0, +\pi] \mapsto \sin(t + \pi/4)$$

   Etudier sa série de Fourier ; en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2 - 1}$. D4-24
9. Déterminer (a, b) tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\int_0^{\pi} (at + bt^2) \cos nt\ \ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.
   Calculer les sommes des séries $\displaystyle\sum \frac{\cos nt}{n^2}$, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$. d4-28
10. Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et $2\pi-$périodiques telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x-\pi) + \sin x$. d4-029
11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $2\pi-$périodique et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.
   Calculer les coefficients de Fourier de la fonction dérivée f' en fonction de ceux de f.
   Montrer que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \le \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$. Etudier le cas d'égalité.
   En déduire l'inégalité isopérimétrique : Si L est la longueur d'un arc simple fermé Γ de classe $\mathcal{C}^1$ et A l'aire du domaine borné de contour Γ, alors $A \le \dfrac{L^2}{4\pi}$. D4-42
12. Soit $\lambda > 0$ et $\lambda_1, ..., \lambda_p$ p réels distincts tels que $\displaystyle\max_{k \in [\![1,p]\!]} |\lambda_k| \le \lambda$.
   Soit $(a_1, ...a_p) \in \mathbb{C}^p$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad P(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k e^{i\lambda_k t}$. Montrer que $\|P'\|_\infty \le \lambda \|P\|_\infty$.
   Pour cela, on utilisera pour $t = \lambda_k$ le développement de Fourier de la fonction ϕ impaire et $4\lambda-$périodique définie par $\phi(t) = t$ pour $t \in [0, \lambda]$, $\phi(t) = 2\lambda - t$ pour $t \in [\lambda, 2\lambda]$. D4-48

13. Soit $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\exp(it)) \in \mathbb{C}$; calculer ses coefficients de Fourier ; étudier sa série de Fourier.
Prouver que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos t}\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}$. d4-50

14. Soit $f = (x \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(n+x)^2}$. Prouver que $\exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n x)$. *Centrale* d4-053

15. Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $2\pi-$périodique. Démontrer que :
$$(\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|f^{(n)}\|_\infty \leq MA^n) \Rightarrow (\forall k \quad |k| > A \Rightarrow c_k(f) = 0)$$
En déduire une CNS pour que f soit un polynôme trigonométrique. D4-47