1. **Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.**
2. **Etudier $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_1^{+\infty} e^{-nx}\sin(x)\ \mathrm{d}x$.**
3. **Limite en $+\infty$ de la fonction $\zeta : t \mapsto \displaystyle\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^t}$.**
   Variations, convexité de la fonction ζ.
4. **Soit $f(x) = \displaystyle\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n}\cos^n x\sin nx$. Etudier l'existence de $f(x)$, la continuité de la fonction f.**
   Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Calculer Df ; en déduire f. D2-048

---

5. *On pose $\phi(x) = \inf\{|x-n|, n\in\mathbb{Z}\}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\phi(4^n x)$.*
   (a) *Prouver que ϕ est lipschitzienne et $1-$périodique.*
   (b) *Prouver que f est définie, $1-$périodique et continue sur $\mathbb{R}$.*
   (c) *Prouver que f n'est pas dérivable en 0.* D2-056

---

6. Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. Prouver que $S\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Calculer $S(1)$. Prouver que $\forall x>0\quad xS(x)-S(x+1)=\dfrac{1}{e}$.
   Prouver que $S(x)\underset{0^+}{\sim}\dfrac{1}{x}$ et déterminer un DL_3 en $\dfrac{1}{x}$ quand $x\to+\infty$.
   Prouver que $\forall x\geq 1\quad S(x)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$. *CCP* d2-061
7. Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_1^x(\ln t)^n\ \mathrm{d}t\right)$. D2-016
8. Calculer $I_n=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}x^ne^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ en fonction de n. Calculer $I=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2-ix}\ \mathrm{d}x$. *CCP* d2-012
9. On note E la fonction partie entière et $D = x\mapsto x-E(x)$.
   Prouver que la série de fonctions de terme général $u_n = x\mapsto\dfrac{D(nx)}{2^n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note U sa somme.
   Prouver que U est périodique, continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, continue à droite et discontinue à gauche en tout point $a\in\mathbb{Q}$ et calculer $U(a)-\displaystyle\lim_{x\to a, x<a}U(x)$. d2-029
10. (a) On admet que $\displaystyle\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Montrer que : $\displaystyle\int_{]0,1[}\ln t.\ln(1-t)\ dt = 2-\frac{\pi^2}{6}$.
    (b) Existence et calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_{]0,+\infty[}\frac{1}{t}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|dt$.
    (c) Existence et calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_{]0,1[}\frac{\ln x}{x-1}dx$. D2-044
11. (a) Equivalent en 0^+ de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x}$. (Encadrer par des intégrales)
    (b) Equivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x}$.
    (c) Montrer que $\dfrac{1}{\sinh x}$ est un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sinh nx}$. D2-50