1. **Prouver que $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^t\overline{A}B)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.**
2. **Soit F et G des sous-espaces de E euclidien.**
   Prouver que $(F^\perp)^\perp = F, (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp, (F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
3. **Si $B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, prouver que $\mathrm{rg}({}^tBB) = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(B^tB)$.**
4. **Soit A une matrice symétrique réelle. Prouver que $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \iff \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0$.**
5. **Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Prouver que $\ker u = (\mathrm{Im}(u))^\perp$ et $\mathrm{Im} u = (\ker(u))^\perp$.**
6. **Soit a, b dans un espace euclidien E tels que $\|a\| = \|b\|$ et $a \neq b$. Prouver qu'il existe une réflexion r et une seule telle que $r(a) = b$.**
7. **Résoudre dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'équation $M\ {}^tM\ M = I_n$.** *CCP-Centrale* b1-100
8. **Pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, soit $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)Q(t)\,dt$. Démontrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.**
   Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $[\phi(P)](t) = (t^2-1)P''(t) + (2t+1)P'(t)$.
   Démontrer que ϕ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer ses valeurs propres. B1-61

---

9. *Soit E un espace euclidien et n sa dimension. A toute famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ de vecteurs de E on associe la matrice $G(x_1,...,x_p) \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ de terme général $\langle x_i | x_j\rangle$ et le déterminant $\mathrm{Gram}(x_1,...,x_p) = \det(G(x_1,...,x_p))$, appelés respectivement matrice de Gram et déterminant de Gram de la famille $(x_1,x_2,...,x_p)$.*
   (a) *Démontrer que $\mathrm{rang}(G(x_1,x_2,...,x_p)) = \mathrm{rang}(x_1,x_2,...,x_p)$.*
   Démontrer que, si $(x_1,x_2,...,x_p)$ est libre, $\mathrm{Gram}(x_1,x_2,...,x_p) > 0$.
   (b) *Soit F un sous-espace de E, p sa dimension et $(e_1,e_2,...,e_p)$ une base de F.*
   Démontrer que : $\forall x \in E \qquad d(x,F)^2 = \dfrac{\mathrm{Gram}(x,e_1,e_2,...,e_p)}{\mathrm{Gram}(e_1,e_2,...,e_p)}$.
   En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}^\star \quad \forall (x_1,x_2,...,x_p) \in E^p \quad \mathrm{Gram}(x_1,x_2,...,x_p) \leq \|x_1\|^2 ... \|x_p\|^2$. (Inégalité de Hadamard) Etudier les cas d'égalité. b1-44
10. *E est un espace euclidien. Prouver que, si p et q sont deux projecteurs orthogonaux de E, alors $p \circ q$ est diagonalisable.*
    On pourra prouver successivement :
    – que $p\circ q\circ p$ est diagonalisable,
    – que toute valeur propre non nulle λ de $p\circ q\circ p$ est valeur propre de $p\circ q$ et $E_\lambda(p\circ q\circ p) \subset E_\lambda(p\circ q)$,
    – que $\mathrm{rg}(p\circ q) \leq \mathrm{rg}(p\circ q\circ p)$. b1-011
11. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \|f(x) - f(y)\| = \|y - x\|$ et $f(0) = 0$.*
    Montrer que f est un automorphisme orthogonal. *Centrale* B1-92

---

12. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \displaystyle\sum_i a_iX^i$ et $Q = \displaystyle\sum_i b_iX^i$, $(P|Q) = \displaystyle\sum_i a_ib_i$.
    Soit $H = \{P \in E / P(1) = 0\}$.
    (a) Trouver une base orthonormée de H.
    (b) Calculer $d(X,H)$. b1-005
13. Soit $\mathbb{R}^3$ considéré comme un espace euclidien orienté. On note U la sphère unité : $U = \{X \in \mathbb{R}^3 \ ;\ \|X\| = 1\}$.
    (a) Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ {}^tXBX > 0$.
    On définit $\left| \begin{array}{lccc} g : & U & \to & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & {}^tXBX \end{array}\right.$. Montrer que g atteint un minimum positif que l'on calculera.
    (b) Montrer que $\exists! S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \quad S^2 = B$ et $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ {}^tXSX > 0$.
    (c) Soit $\left| \begin{array}{lccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & \dfrac{2xy+2yz}{5x^2+5y^2+6z^2+2xy+8xz+8yz} \end{array}\right.$.
    Montrer que f est bien définie et qu'il existe une matrice réelle symétrique T telle que :
$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad f(x,y,z) = \frac{{}^tX_1TX_1}{{}^tX_1X_1}.$$

(d) En déduire que cette fonction est bornée, atteint ses bornes et les calculer.

Centrale b1-019

14. Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Démontrer l'équivalence des propriétés :
   – p est un projecteur orthogonal
   – $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$
   – $\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle$. B1-28
15. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que, si A est symétrique, $A = 0$. *CCP* b1-47
16. Démontrer que $(f,g) \mapsto \langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   Soit $f : P \mapsto (X^2-1)P" + 2XP'$. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant
   $$\forall (P,Q) \quad \langle f(P),Q\rangle = \langle P, f(Q)\rangle$$
   et que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.
   Démontrer l'existence d'une base orthonormale $(L_0, L_1, \cdots, L_n, \cdots)$ de vecteurs propres de f. Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3 \quad L_{n+1} = (a_nX + b_n)L_n + c_nL_{n-1}$$
   Centrale-CCP b1-042
17. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice orthogonale S telles que $A = TS$. *CCP* b1-033
18. Soit E euclidien de dimension ≥ 3, (a,b) une famille libre de deux éléments unitaires de E. On définit $f : E \to E$ par :
   $$\forall x \in E,\ f(x) = \langle a,x\rangle a + \langle b,x\rangle b.$$
   Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. B1-103
19. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^*$ tel que ${}^tM = M^{-1} + aI_n$ et $B =^t MM$.
   Montrer que B est symétrique.
   Montrer que M est diagonalisable.
   Déterminer un polynôme annulateur de M.*CCP* b1-012
20. (a) Montrer que $\varphi : (X,Y) \mapsto \mathrm{tr}({}^tXY)$ est un produit scalaire.
   (b) On note $C(A) = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AX = XA\}$. On introduit $\left| \begin{array}{cccc} f : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & AX - XA \end{array} \right.$.
   Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :
   (1) Il existe $X_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = AX_0 - X_0A$.
   (2) Quel que soit $X \in C(A), \mathrm{tr}(BX) = 0$.

   Mines b1-051