1. **Prouver que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $y \mapsto \int_a^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est un $\mathcal{C}^\infty-$difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer le DL_2 en 0 de la fonction réciproque.**
2. **Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que f et D^2f soient bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que Df est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\|Df\|_\infty \leq \sqrt{2\,\|f\|_\infty \|D^2f\|_\infty}$. (On pourra utiliser des développements de $f(x+h)$ et $f(x-h)$)** C4-020
3. **Etude et courbe représentative de $\left(x \mapsto \int_{1/x}^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}\right)$.** C6-017
4. **Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\exists k > 0 \quad \forall x > 0 \quad f(x) \leq k \int_0^x f$. Démontrer que $f = 0$.** C6-011

---

5. *Soit* $\Delta_n = \int_0^1 f - \dfrac{1}{2n}\left(f(0) + f(1) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$.
   (a) *On suppose* $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ *et* f' *lipschitzienne sur* $[0,1]$ *; démontrer que* $\lim n\Delta_n = 0$.
   (b) *On suppose* $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *et* f'' *lipschitzienne sur* $[0,1]$ *; démontrer que* $\lim n^2\Delta_n = \dfrac{1}{12}\left(f'(0) - f'(1)\right)$.

   On pourra utiliser des développements de Taylor de la fonction $G_k : x \mapsto \int_{\frac{k}{n}}^x f$ *en* $\dfrac{k}{n}$. C6-100

---

6. Soit f définie par $\begin{cases} x \leq 0 & \Rightarrow \quad f(x) = 0 \\ x > 0 & \Rightarrow \quad f(x) = e^{-1/x} \end{cases}$
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
   Montrer que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x}$ où P_n est un polynôme dont on précisera le degré. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(n)}(0)$.
   Déterminer g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, positive strictement sur $]a,b[$ et nulle partout ailleurs. *Mines* c4-006
7. Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y)f(x-y) \leq f^2(x)$.
   Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x)f''(x) \leq f'^2(x)$. C4-003
8. Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $n \geq 2$.
   (a) Montrer qu'il existe $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ tels que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

   Mines c4-008
9. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f \circ f(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels, $a \neq 0$ et $a \neq 1$.
   (a) Montrer que f est monotone, bijective et que a est positif.
   (b) Trouver une relation analogue pour f^{-1}.
   (c) Montrer que f' est constante, puis exprimer f.
   (d) Dans le cas où $a = 1$, montrer que b est nul ou f croissante.

   Centrale c4-047
10. Prouver que $\begin{array}{ccl}]-\pi/2, \pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = \tan x - x \end{array}$ admet une réciproque $(y \mapsto x = F(y)$.
    Existence et calcul de $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(y) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{a_1}{y} + \dfrac{a_2}{y^2} + o_{y\to 0}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$. c4-059
11. Etudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $F(x) = e^{1/x}\int_0^x e^{-1/t}dt$. C6-084

12. Soit f une fonction définie et continue sur $[0\ 1]$ et telle que $\forall x \in [0\ 1] \quad f(x) = \int_0^x f(t - t^2) dt$.
    Montrer que, si $M = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1/2} |f(t)|$, alors $\forall x \in [0\ 1/2] \quad |f(x)| \leq M/2$.
    En déduire la valeur de f. C6-076
13. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\ dt$ pour une valeur $a \in]0\ 1]$.
    Démontrer que f est la fonction nulle. *Mines* C6-024
14. Déterminer toutes les fonctions g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x) - g(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} g(t)\ \mathrm{d}t$. C6-034