1. **Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; donner les valeurs propres de l'endomorphisme u_A défini sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $u_A(M) = AM$. Est-il diagonalisable ?** *CCP* a0-023
2. **Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.** *CCP* a0-019
3. **Soit u, v deux endomorphismes de E, $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie tels que u et v commutent. Prouver qu'il existe un vecteur propre commun à u et v.**
4. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. On définit**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & (\mathrm{tr}A)M - (\mathrm{tr}M)A \end{array}$$

   Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Déterminer les éléments propres de f. a0-097
5. **Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ tel que $A^3 - 3A^2 + 2A = O_6$ et $\mathrm{tr}(A) = 8$. Déterminer χ_A.**
6. **Soit A une matrice de rang 1. Déterminer son polynôme caractéristique et ses éléments propres.**

---

7. *Prouver que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables. (L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$)*
8. *Soit $M \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable. Démontrer que M est diagonalisable.* a0-106
9. *Soit u, v, f trois endomorphismes de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tels qu'il existe $(\lambda, \mu) \in K^2$ tel que : $f = \lambda u + \mu v$, $\quad f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v$, $\quad f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v$. Montrer que f est diagonalisable et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \lambda^n u + \mu^n v$.* a0-107
10. (a) *Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n. Calculer $\begin{pmatrix} xI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ B & I_n \end{pmatrix}$.*
    Démontrer que, pour toutes matrices carrées A et B, AB et BA ont même polynôme caractéristique.
    (b) *Dans cette question, on suppose seulement que $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.*
    Comparer les polynômes caractéristiques de AB et BA.
    On pourra utiliser une factorisation de A de la forme $A = UJ_rV$ où U et V sont inversibles et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. a0-102
11. *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.*
    (a) *Démontrer que A est nilpotente si et seulement si $\chi_A(X) = (-X)^n$.*
    (b) *Exprimer le développement limité d'ordre $n+1$ en $+\infty$ de $F(t) = \dfrac{\chi_A'(t)}{\chi_A(t)}$ au moyen des nombres $\mathrm{tr}(A^k)$.*
    (c) *Démontrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\quad \mathrm{tr}(A^k) = 0$.*
    Centrale A0-144

---

12. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, et $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 2b - ac \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser M. *CCP* a0-017
13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 = A + I_n$. Démontrer que $\det A > 0$. A0-105
14. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $X^2 = A$, puis $X^2 + X = A$.
    (b) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $X^2 - 3X = A$. Montrer que $AX = XA$.
    Résoudre l'équation $X^2 - 3X = A$.*CCP*

(c) Résoudre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation $X + X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Centrale* A0-122

15. Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie et Φ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par $\Phi(v) = u \circ v$. Montrer que Φ est diagonalisable si et seulement si u l'est. Si u est diagonalisable, que dire de $\psi : v \mapsto u \circ v - v \circ u$? *Centrale* a0-033

16. $A = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

    Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} O_{nn} & A \\ I_n & O_{nn} \end{pmatrix}$, en fonction de celui de A. *CCP* a0-032

17. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, vérifiant $u^3 + u = 0$. Montrer que u est de rang pair. *CCP* a0-029

18. (a) Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ d'équation $\sum_1^n \alpha_i x_i = 0$ dans la base canonique.

    Montrer que H est stable par u si et seulement si $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

    (b) Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A0-104

19. Existe-t-il $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Généraliser. A10-132

20. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Démontrer : $\operatorname{tr}({}^tXA^{-1}X) = \dfrac{\det(A + X\,{}^tX)}{\det A} - 1$. A10-135

21. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & n & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & (0) \\ & & & & \\ (0) & & \ddots & & 1 \\ & & & n & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres. *Centrale* a0-145

22. Pour $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ donné, on considère la matrice M telle que :

    $$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad m_{ni} = m_{in} = a_i \ ; \quad (i \neq n \text{ et } j \neq n) \Rightarrow m_{ij} = 0.$$

    Soit $\Delta_n(a_1, ..., a_n) = \chi_M(X)$.

    (a) Calculer $\Delta_n(a_1, ..., a_n)$. Etudier les valeurs propres de M et leur ordre.

    (b) Démontrer que $M = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & (0) & & 2 \\ & & & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser.

    (c) Démontrer qu'il existe (λ_1, λ_2) tel que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ soit semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et déterminer une matrice de passage P telle que $\forall j \quad p_{1j} = 1$. A0-059