1. **Soit $f : x \longmapsto \ln(1+x)$; on pose $f_0(x) = x$ et $\forall k \in \mathbb{N}\ f_{k+1} = f_k \circ f$.**
   Démontrer que la famille $(f_k, k \in \mathbb{N})$ est libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. A6-024
2. **Soit E un $K-$espace vectoriel, p un projecteur et $f \in \mathscr{L}_K(E)$. Démontrer que p commute avec f si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par f.** A6-14
3. **Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que $\ker(u^3 - u) = \ker u \oplus \ker(u - Id) \oplus \ker(u + Id)$.**
4. **Soit E de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang r tel que $u \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Prouver que $r \leq n/2$ et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \\ Id_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix}$.**
5. **Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$. Pour $f \in E$, on pose $\phi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ si $x \neq 0$ et $\phi(f)(0) = f(0)$.**
   Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E et déterminer son noyau, son image et ses éléments propres. a0-088
6. **Dans E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $f_1, f_2, ...f_n$ n endomorphismes nilpotents et deux à deux permutables.**
   Montrer que : $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ ... \circ f_n = 0$. A7-060

---

7. *Soit $p_1, p_2, ..., p_n$ n projecteurs d'un $K-$espace vectoriel de dimension finie.*
   Montrer que : $p_1 + p_2 + ... + p_n$ est un projecteur $\iff \forall (i,j) \quad p_i \circ p_j = \delta_i^j p_i$.
   (On pourra montrer que $\mathrm{Im}(\sum_1^n p_i) = \bigoplus_1^n \mathrm{Im} p_i$.) a7-70
8. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension quelconque et p un entier naturel non nul.*
   $\phi_1, ..., \phi_p$ sont des formes linéaires sur E.
   Démontrer que $(\phi_1, ..., \phi_p)$ libre $\iff$ $(x \in E \mapsto (\phi_1(x), ..., \phi_p(x)) \in \mathbb{K}^p)$ surjective.
9. *Soit $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $E^\star$ son dual et $E^{\star\star}$ le dual de $E^\star$. Prouver que $\Theta : X \in E \mapsto \Theta(X) = (Y \in E \mapsto {}^t X Y \in \mathbb{K})$ est un isomorphisme entre E et $E^{\star\star}$.*

---

10. Soit $f = (x \mapsto xe^x \cos x), g = (x \mapsto e^x \sin x), h = (x \mapsto \arctan x)$. Prouver que (f, g, h) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. a6-037
11. Soit n réels $a_1, a_2, ..., a_n$; pour tout entier $k, \Phi_k(x) = \dfrac{1}{x^2 + a_k^2}$; la famille des Φ_k est-elle libre dans l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? *Mines* a6-16
12. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ pour lequel il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
    $$P(0) = 0, \quad P'(0) \neq 0, \quad P(f) = 0.$$
    Prouver que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$. *Mines* a6-004
13. Soit V un espace vectoriel de dimension n, W_1 et W_2 deux sous-espaces de V de même dimension q. Démontrer que W_1 et W_2 ont un supplémentaire commun. a7-75
14. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'ordre p, $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$ et $F = \mathrm{Vect}\left(f^{(k)}(a)\right)_{k \in \mathbb{N}}$.
    (a) Prouver que $\left(f^{(k)}(a)\right)_{k \in [\![0, p-1]\!]}$ est une base de F.
    (b) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(f^{(p-1)}(a)) \neq 0$; prouver que φ existe. Soit $H = \{x \in E / \forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi \circ f^k(x) = 0\}$; démontrer que H est un supplémentaire de F stable par f.
    (c) Décrire la matrice de f dans une base adaptée à $F \oplus H$.
    Prouver qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$ vérifie $a_{i,j} = 0$ si $j \neq i+1$ et $a_{i,i+1} \in \{0, 1\}$. A7-80
15. Soit E un espace vectoriel de dimension n, p un projecteur de rang r non nul et distinct de n ; soit l'application Φ qui à $f \in \mathscr{L}(E)$ associe $-p \circ f + f \circ p$. Déterminer les valeurs propres de Φ et les dimensions des sous-espaces propres associés. *Mines* a0-042
16. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.
    On lui associe la fonction $g = u(f)$ définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \inf(x,t) f(t) dt$.
    Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$.
    Déterminer les éléments propres de u. A0-061

17. Soit $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. A tout élément P de $\mathbb{R}_3[X]$, on associe le reste $\phi(P)$ de la division euclidienne de AP par B.
Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$; déterminer son noyau et ses éléments propres. A0-101
18. Soit $E = \mathbb{R}[X], n \in \mathbb{N}$ et f l'application de E dans E qui, à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ défini par :
$$[f(P)](X) = (a - X)(X - b)P'(X) + nXP(X)$$
où a et b sont deux nombres réels.
Démontrer que f est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.
Démontrer que le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f. a0-058
19. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, à valeurs réelles.
Si $f \in E$, on note F l'application de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2|x - y|)f(y)\ \mathrm{d}y.$$
On note A l'application définie par $\forall f \in E \quad A(f) = F$.
Montrer que A est un endomorphisme injectif de E.
Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de A. a0-41