1. **Soit $w_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (On utilisera le changement de variable $u = \sin^n x$)** c9-054
2. **Limite de la suite de terme général $\int_{\mathbb{R}} (1 + t^2/n)^{-n} \, dt$.**
3. **Prouver que la fonction $J_0 : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \ t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $xy" + y' + xy = 0$.**
4. **Prouver que la fonction ($\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt$) est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\ln \Gamma$ est une fonction convexe.**
5. **Soit $K(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{2i\pi x t} dt$; démontrer que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; déterminer sa dérivée. Calculer $K(x)$.**

---

6. *On appelle 'produit de convolution' de deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, s'il existe, la fonction notée $f \star g$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R} \qquad (f \star g)(t) = \int_0^t f(u) g(t-u) du$.*
   (a) *Démontrer que $\star$ est définie sur $CM(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que, si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, alors $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
   (b) *Démontrer que $\star$ est commutative, associative et distributive par rapport à $+$.*
   (c) *Soit θ un élément neutre de $\star$ s'il existe. Etudier la relation $\theta \star \ 1 = 1$ où 1 désigne la fonction constante $x \mapsto 1$; que peut-on en déduire ?*
   (d) *Pour $f : x \mapsto |x-1|$ et $g : x \mapsto |x|$, représenter f, g et $f \star g$.* C6-093
7. *Pour $x > 0$, on considère la suite de fonctions de terme général $f_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} 1_{]0,n[}(t)$.*
   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} f_n = \Gamma(x)$ puis que $\Gamma(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$. C9-51
8. *On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur un segment $[a \ b]$.*
   (a) *$(x, y) \mapsto K(x, y)$ étant une fonction continue sur $[a \ b]^2$, on considère l'application P_K qui à toute fonction f de $\mathcal{C}$ associe $P_K \ f$ définie par : $P_K \ f(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) \, dy$.*
   Démontrer que P_K est un endomorphisme de $\mathcal{C}$. On appellera P_K 'opérateur intégral de noyau K'.
   (b) *Démontrer que :*
   – *$P_{K_1} = P_{K_2} \Longrightarrow K_1 = K_2$. (On pourra utiliser des fonctions $f : y \mapsto (K_1 - K_2)(x_0, y)$)*
   – *$P_{K_1} \circ P_{K_2}$ est un opérateur intégral dont on précisera le noyau.*
   – *Id n'est pas un opérateur intégral.*
   – *L'inverse d'un opérateur intégral, s'il existe, n'est pas un opérateur intégral.* C6-075
9. *Soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} v_n \sin nx = 0$.*
   Prouver que $\lim v_n = 0$. c9-056

---

10. Soit f une fonction continue de $[0 \ 1]$ dans E . Démontrer que $\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 t^n \ f(t) \ dt = f(1)$. C6-006
11. Soit $I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n \, dx$; déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
    En déduire que $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$. C6-080
12. Démontrer que $\int_0^x e^{t^2} dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$ C6-079

13. Au moyen d'une décomposition en éléments simples, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}\ \mathrm{d}x$$

avec $(m,n) \in \mathbb{N}^\star$ et $2n > 2m$. En déduire, en utilisant une suite de rationnels de limite α, avec $\alpha \in]0\ 1[$, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

C8-091

14. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\ \mathrm{d}t$, pour f continue bornée sur $\mathbb{R}_+$. Justifier rapidement l'existence de I_n. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$. *Mines* c9-023

15. Soit $f_n(x) = \dfrac{1}{\left(\mathrm{ch}\,\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n}$. Démontrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$. C9-045

16. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)\ \mathrm{d}x$ où a et b sont deux réels > 1. c6-098

17. Soit $\varphi = x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t+x}\ \mathrm{d}t$. Quel est son ensemble de définition ?
Démontrer qu'on peut prolonger φ par continuité en 0. Etudier la parité de φ. Etudier l'existence et la valeur sur $\mathbb{R}$ de φ' et de φ". c6-077

18. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.
Etudier la continuité et la dérivabilité de f. Etudier $f(0)$, $\displaystyle\lim_{+\infty} f$ et $\displaystyle\lim_{-\infty} f$.
Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x^2) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$. C6-072

19. Etudier $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^y)}$. *Centrale* c6-026

20. Soit $x > 0$ et $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-tx}}{t}\ \mathrm{d}t$. Montrer que I existe et est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $I(x)$. *CCP* c8-026

21. Soit $g = \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\ \mathrm{d}t\right)$. Prouver que g est définie sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
Exprimer $g(x)$ au moyen des fonctions usuelles et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$. *Centrale* c8-046

22. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\ \mathrm{d}t$.
Quel est l'ensemble de définition de f ?
Démontrer que $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$. On pourra étudier successivement les comportements de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\ \mathrm{d}t$ puis de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\ \mathrm{d}t$. C8-105