1. **Prouver que $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1}\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$.**
2. **Déterminer l'orthonormalisée par la méthode de Schmidt de $(1,X,X^2)$ dans $\mathbb{R}[X]$ muni de $\left((P,Q)\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t\right)$**
3. **Existence et calcul de $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (\exp(t)-at-b)^2\ \mathrm{d}t$.**
4. **Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de [0 1] dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=f(1)=0$ et $f'(0)=a$.**
   Déterminer $\min\limits_f\left(\int_0^1 (f"(t))^2\,dt\right)$ et les fonctions f pour lesquelles ce minimum est atteint.
   (On pourra intégrer par partie $\int_0^1 f"(t)(1-t)dt$) C6-092
5. **Existence de la série de Fourier et calcul du terme général pour la fonction $f:(t\in[0,\pi]\mapsto \mathrm{ch}\,tx)$, f impaire et $2\pi-$périodique (x est une constante réelle).**

---

6. *Prouver que* $\left(f\mapsto\left(\int_0^1 f'^2+f(0)f(1)\right)^{1/2}\right.$ *sur* $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *est une norme euclidienne.*
7. *Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que : $\forall x\in E\quad \|f(x)\|\le\|x\|$.*
   (a) *Démontrer que :* $E=\ker(f-Id)\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Im}(f-Id)$.
   (b) *Pour $x\in E$ et $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose :* $u_n(x)=\dfrac{1}{n}(x+f(x)+f^2(x)+...+f^{n-1}(x))$ *; démontrer que la suite $(u_n(x))$ converge vers la projection orthogonale de x sur* $\mathrm{Ker}(f-Id)$. B1-78
8. *Soit* $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *et* $\varphi(f,g)=\int_{[0,1]} fg+f'g'$.
   (a) *Montrer que φ est un produit scalaire.*
   (b) *Soit* $V=\{f\in E/f(0)=f(1)=0\}$ *et* $W=\{f\in E/f"=f\}$. *Montrer que V et W sont des supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W.*
   (c) *Soit* $E_{\alpha\beta}=\{f\in E/f(0)=\alpha\ \text{ et }\ f(1)=\beta\}$. *Déterminer* $\inf\limits_{f\in E_{\alpha\beta}}\int_{[0,1]} f^2+f'^2$. b1-006

---

9. On se donne une suite (a_n) bornée à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ et $E=\mathbb{R}[X]$.
   (a) A tout couple $(P,Q)\in E^2$, on associe la série de terme général $u_n=\dfrac{a_n}{2^n}P(n)Q(n)$. Démontrer la convergence de cette série.
   (b) Démontrer que $\langle P,Q\rangle=\sum\limits_0^{+\infty}\dfrac{a_n}{2^n}P(n)Q(n)$ définit un produit scalaire sur E.
   (c) Si l'on avait seulement (a_n) à termes dans $\mathbb{R}_+$, à quelle condition $\langle P,Q\rangle$ définirait-il encore un produit scalaire ?
   (d) On suppose maintenant $\forall n\ a_n=1$ et on désigne par N_1 la norme associée au produit scalaire $\langle .,.\rangle$. Est-elle équivalente à la norme N_2 définie par $N_2(P)=\sup\limits_{x\in[0,1]}|P(x)|$? B1-97
10. Soit E un espace préhilbertien, soit n vecteurs $(x_1,x_2,...,x_n)$ dans E.
    On suppose que $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad i\neq j\Rightarrow\|x_j-x_i\|\ge 2$ et que $\forall i\in[\![1,n]\!]\quad \|x_i\|\le R$.
    Montrer que $R\ge\sqrt{2\dfrac{n-1}{n}}$. B1-91
11. Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1,e_2,...,e_n)$ un système de vecteurs unitaires de E tels que :
    $\forall x\in E\quad \|x\|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(x|e_i)^2$.
    Démontrer que $(e_1,e_2,...,e_n)$ est une base orthonormale de E.*Centrale* B1-68

12. Montrer que $(P|Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})}Q(e^{it})dt$ munit $\mathbb{C}_n[X]$ d'une structure d'espace hermitien et que la base canonique est orthonormale.
    Soit A un polynôme non nul de coefficient dominant a. Montrer que $\sup\limits_{|z|=1} |A(z)| \geq |a|$. Quand a-t-on égalité ? *Mines* b1-058

13. Soit l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et de la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$.
    On pose $H = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E / \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$. Déterminer la distance euclidienne de e_1 à H.
    Même question avec $H' = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E / \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i = 0 \right\}$. *Centrale* b1-001

14. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ muni de $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{0}^{4} P(i)Q(i)$.
    Démontrer que E est un espace euclidien. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$.
    On considère les points $A_i = (x_i, y_i)$ définis par : $A_0 = (0,1), A_1 = (1,2), A_2 = (2,1), A_3 = (3,2), A_4 = (4,4)$. Démontrer qu'il existe un polynôme P et un seul dans E tel que $\forall i \in [\![0, 4]\!] \quad P(x_i) = y_i$. Déterminer la projection orthogonale P_1 de P sur $\mathbb{R}_2[X]$. Interpréter P_1. b1-24

15. Démontrer que $(a_1...a_n) \mapsto \displaystyle\int_0^1 (1 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_n x^n)^2 \, dx$ admet un minimum atteint en un point unique. Valeur de ce minimum ? B1-099

16. Existence de la série de Fourier et calcul du terme général pour les fonctions suivantes :
    (a) $f(x) = x(\pi - x)$ pour $0 < x < \pi$ et f est $\pi-$périodique.
    (b) $f(x) = \sin \alpha x$ pour $|x| < \pi$, α est une constante, $\alpha \notin \mathbb{N}$, f est $2\pi-$périodique.
    (c) $f(t) = \sup(a \sin \omega t, 0)$ avec $(a, \omega) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. d4-17/3/9/23