

1. Etudier suivant  $\alpha$  l'existence de l'intégrale  $I_\alpha = \int_0^{\pi/2} (\tan x)^\alpha dx$ . Calculer  $I_{1/2}$ . c8-052
2. Soit  $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}$ . Etudier l'intégrabilité de  $f_{\alpha,\beta}$  sur  $]0, +\infty[$ ; calculer  $\int_0^{+\infty} f_{2,1/2}$ . C8-056
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ( $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ ) et calculer  $\Gamma(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
4. Prouver que  $\left(t \mapsto \frac{\sin t}{t}\right)$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$  mais  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  existe. Prouver l'égalité  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$
5. Soit  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{x}} \sin(x) dx$ ; étudier la série  $\sum u_n$ . En déduire l'étude de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \sin(x) dx$  C8-090
6. Domaine de définition de  $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$ .  
Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = 0$  (On pourra utiliser  $e^{\sqrt{t}} - 1 \geq \sqrt{t}$ ), et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$ .  $f$  est-elle intégrable sur  $]0, +\infty[$ ? CCP c8-022

7. Soit  $f$  lipschitzienne et intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . Démontrer que  $\lim_{+\infty} f = 0$ . C8-107
8. Prouver l'existence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + e^x \sin x^2}$ . Mines c8-001
9. Existence et calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\tanh 3x - \tanh 2x}{x} dx$ . c8-045

10. Existence et calcul de  $I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ . CCP c8-018
11. Existence et calcul de  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin^3 x dx$ . c8-038
12. Intégrabilité de  $x \mapsto \ln(\sin x)$  sur  $]0, \pi/2]$  et calcul de l'intégrale. CCP C8-009
13. Soit  $f_n = x \mapsto \frac{n!}{(x+1)\dots(x+n)}$ . Intégrabilité de  $f_n$  sur  $]0, +\infty[$  et calcul éventuel de  $\int_0^{+\infty} f_n$ . CCP C8-089
14. Existence et calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ . CCP c8-032
15.  $a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t+t^2)^n}$  existe-t-elle?  
Tracer  $f(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$  et donner son axe de symétrie.  
Montrer que  $(\sum a_n)$  est divergente.  
Expliciter  $a_n$  en fonction de  $w_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^n}$ . Donner une relation liant  $w_n$  et  $w_{n+1}$ . CCP c8-030
16. Existence et calcul de  $\int_0^1 \left(-E\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}\right) dt$  Centrale c8-040
17. Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^n} dx = \int_0^\pi \cos(y)^{n-1} dy$ . CCP c8-023