

1. Etudier suivant α l'existence de l'intégrale $I_\alpha = \int_0^{\pi/2} (\tan x)^\alpha dx$. Calculer $I_{1/2}$. c8-052
2. Soit $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}$. Etudier l'intégrabilité de $f_{\alpha,\beta}$ sur $]0, +\infty[$; calculer $\int_0^{+\infty} f_{2,1/2}$. C8-056
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ($\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$) et calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Prouver que $\left(t \mapsto \frac{\sin t}{t}\right)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ mais $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ existe. Prouver l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$
5. Soit $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{x}} \sin(x) dx$; étudier la série $\sum u_n$. En déduire l'étude de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \sin(x) dx$ C8-090
6. Domaine de définition de $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$.
Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = 0$ (On pourra utiliser $e^{\sqrt{t}} - 1 \geq \sqrt{t}$), et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$. f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$? CCP c8-022

7. Soit f lipschitzienne et intégrable sur \mathbb{R}^+ . Démontrer que $\lim_{+\infty} f = 0$. C8-107
8. Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + e^x \sin x^2}$. Mines c8-001
9. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\tanh 3x - \tanh 2x}{x} dx$. c8-045

10. Existence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$. CCP c8-018
11. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin^3 x dx$. c8-038
12. Intégrabilité de $x \mapsto \ln(\sin x)$ sur $]0, \pi/2]$ et calcul de l'intégrale. CCP C8-009
13. Soit $f_n = x \mapsto \frac{n!}{(x+1)\dots(x+n)}$. Intégrabilité de f_n sur $]0, +\infty[$ et calcul éventuel de $\int_0^{+\infty} f_n$. CCP C8-089
14. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$. CCP c8-032
15. $a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t+t^2)^n}$ existe-t-elle?
Tracer $f(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$ et donner son axe de symétrie.
Montrer que $(\sum a_n)$ est divergente.
Expliciter a_n en fonction de $w_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^n}$. Donner une relation liant w_n et w_{n+1} . CCP c8-030
16. Existence et calcul de $\int_0^1 \left(-E\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}\right) dt$ Centrale c8-040
17. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^n} dx = \int_0^\pi \cos(y)^{n-1} dy$. CCP c8-023