1. **Prouver que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.**
2. **Prouver que $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.**
3. **Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Prouver que :**
   (a) **Toute boule ouverte de E est un ouvert de E.**
   (b) **Toute boule fermée de E est un fermé de E.**
   (c) **Toute boule fermée de E est un compact de E.**
   (d) **Tout sous-espace vectoriel de E est un fermé de E.**
   (e) **Le seul sous-espace vectoriel ouvert de E est E.**
   (f) **Le seul sous-espace vectoriel compact de E est $\{0_E\}$.**
4. **Prouver que l'ensemble des matrices de rotations est un compact de $\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$**
5. **Soit $f(x,y) = \dfrac{y^2+xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $(x,y) \neq [0,0)$. f admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$, 1- si $\alpha = 1/2$? 2- si $\alpha = 1$?**

---

6. (a) *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, $(x_1,...,x_{n-1})$ un élément fixé de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto N(x_1,...,x_{n-1},t)$. Démontrer que ϕ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$ et que ϕ atteint sa borne inférieure en au moins un point de $\mathbb{R}$.*
   (b) *N est toujours une norme sur $\mathbb{R}^n$; à tout $(x_1,...,x_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ on associe $N_1(x_1,...,x_{n-1}) = \min_{t\in\mathbb{R}} N(x_1,...,x_{n-1},t)$; démontrer que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^{n-1}$.*
   (c) *Déduire de ce qui précède que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.* c3-069
7. *Soit E,F des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels de dimensions finies. Prouver que $u \in \mathscr{L}(E,F) \mapsto \|u\| = \sup\limits_{x\in E\setminus\{0\}} \dfrac{N_F(u(x))}{N_E(x)}$ est une norme.*
   Désormais, $E = F$; prouver que $\|.\|$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$ et qu'elle vérifie : $\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E))^2$, $\quad \|v\circ u\| \leq \|v\|.\|u\|$.
8. *Prouver que si P est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et que P est fermé et distinct de $\mathbb{R}$, alors il existe $c_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $P = c_0\mathbb{Z}$.* C3-52
9. *Soit $f : E \to F$ où E et F sont deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels normés.*
   On suppose que f est bornée sur la boule unité et que $\forall (x,y) \in E^2 \quad f(x+y) = f(x)+f(y)$.
   Démontrer que f est linéaire. c3-064

---

10. (a) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{e^y-e^x}{y-x} \text{ si } x \neq y \end{array}$. f admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$?
    (b) Soit $f(x,y) = \dfrac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq [0,0)$. f admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$? c3-002
11. Soit $(x,y) \mapsto N(x,y) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{x+ty}{1+t^2}\right|$. Prouver que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représenter $\overline{B}(O,R)$ pour cette norme. Justifier directement que N est équivalente à $\|.\|_\infty$. c3-081
12. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K un compact de E et f une application de K dans E telle que $f(K) \subset K$ et $\forall (x,y) \in K^2, \quad x \neq y \Rightarrow N(f(x)-f(y)) < N(x-y)$.
    Prouver que f a un point fixe et un seul. c3-080
13. E est un espace vectoriel normé. Montrer que :
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+\|x\|} \end{array}$$
    induit une bijection g de E sur la boule unité ouverte.
    Montrer que g est lipschitzienne et que g^{-1} est continue et non lipschitzienne. C3-026
14. Montrer que $f = (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{1+e^{x^2+2y^2}}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. *Centrale* c3-009
15. Soit f continue sur $[0,1]$ vérifiant $f^2 = f$. Montrer que f admet au moins un point fixe, puis que l'ensemble des points fixes de f est un segment *CCP* c3-012

16. Pour $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, soit $N(A) = \sup\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$.
   (a) Démontrer que N est une norme sur $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.
   (b) On étudie l'application tr de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ muni de la norme N dans $\mathbb{C}$.
   Justifier la continuité de tr.
   Déterminer un majorant de $\left\{ \dfrac{|\mathrm{tr}A|}{N(A)} \right\}_{A \neq 0}$.
   (c) Démontrer que $\sup \left\{ \dfrac{|\mathrm{tr}A|}{N(A)} \right\}_{A \neq 0} = n$.
   (d) Démontrer que $\left\{ \dfrac{|\mathrm{tr}A|}{N(A)} \right\}_{A \neq 0} = [0, n]$. C3-60