1. **Convergence et somme des séries :** $\sum \arctan \dfrac{1}{n^2+3n+3}$ $\qquad \sum 3^{n-1} \sin^3 \dfrac{\alpha}{3^n}$. D1-17
2. **Etudier** $\sum \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ $\qquad \sum \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^3$ $\qquad \sum \dfrac{1}{\sqrt{n \ln n}}$ $\qquad \sum \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

   Valeur approchée à 10^{-2} près de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.
3. **Etudier la série** $\sum \arccos\left(\dfrac{2}{\pi} \arctan n^2\right)$. d1-016
4. **Prouver que** $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ **est semi-convergente et donner une valeur approchée à 10^{-3} près de sa somme.**
5. **Etudier la série** $\displaystyle\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{x}} \sin x \, dx$. d1-042
6. **Etudier la série de terme général** $u_n = \sqrt[3]{n^6+n^4+n^2-1} - \sqrt{n^4+an^2+bn+1}$ **pour** $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. d1-066
7. **Etudier la série** $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+2})$. d1-006
8. **Prouver que le produit de Cauchy de 2 séries exponentielles est une série exponentielle. Valeur approchée à 10^{-5} près de $\exp(1/3)$.**
9. **Prouver que la suite** $\left(\left(\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{k}\right) - \ln n\right)$ **est convergente.(Sa limite s'appelle la "constante d'Euler")**
10. **Convergence et somme de la série de terme général** $\dfrac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$. d1-106
11. **On admet que** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. **Calculer** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ **et** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

---

12. *Pour $n \geq 2$, on pose* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $c_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ *; étudier les séries* $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$.
13. *'Critère d'Abel (1802-1829)'*

    Soit (s_n) et (t_n) deux suites réelles et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} s_k$ *et* $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t_k$.

    On suppose que (s_n) et (t_n) vérifient les conditions suivantes :

    $$\begin{array}{ll} (i) & \exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |T_n| \leq M \\ (ii) & \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0 \quad \text{et la suite } (S_n) \text{ est décroissante} \end{array}$$

    Démontrer que la série $\sum T_k \, s_{k+1}$ *est absolument convergente puis que la série* $\sum t_k \, S_k$ *est convergente.*

    Application : Démontrer la convergence de la série $\sum \dfrac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ *pour $\alpha > 0$ et $\theta \neq 0 \quad (2\pi)$.* D1-117
14. *Soit* $(u_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$. *Vérifier que la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ avec elle-même n'est pas convergente. (On montrera que son terme général ne tend pas vers 0)* D1-141
15. *'Le cas douteux de la règle de d'Alembert'*

    Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes strictements positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et une série absolument convergente $\sum v_n$ tels que :

    $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n$$

    Démontrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^\alpha}$.

    Application : Etudier la série $\sum n^{-n} \, n! \, e^n$. D1-145

16. *(a_n) est une suite convergente de limite α et $\phi(\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\lambda^n}{n!}$. Démontrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} \phi(\lambda) = \alpha$.* D1-129

17. *Soit a une suite à termes dans $\mathbb{R}_+$ et la suite u définie par $\left(u_0 > 0\ ,\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}\right)$. Prouver que la suite u converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.*

---

18. Etudier la série de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$. D1-147

19. Soit $u_n = a\ln n + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$. Convergence et somme éventuelle de la série $\sum u_n$. D1-036

20. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\ln(t) = \arctan t + n\pi$ a une unique solution x_n strictement positive.
Etudier la série : $\sum \frac{1}{x_n}$. D1-137

21. Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1! + 2! + ... + n!}{(n+p)!}$. *CCP* d1-107

22. a_n est la somme des chiffres de l'écriture de n en base 2. Calculer a_{2n} ; calculer a_{2n+1}.
Etudier $\sum \frac{a_n}{n(n+1)}$. *Centrale* d1-120

23. Etudier la série $\sum \left(n^{1/(n+1)} - (n+1)^{1/n}\right)$. d1-004

24. Nature de la série de terme général $(-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$. *CCP* d1-104

25. Soit $u_n = a^n$ et $v_n = (-1)^n a^n$. Etudier la somme et le produit des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. D1-051

26. Etudier la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$. d1-128

27. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} =_{n\to+\infty} n + \frac{\ln^2 n}{2} + K + o(1)$. D1-139

28. Soit $t \in]0,1[$.
    (a) Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(1 + t^n)$ est convergente.
    (b) En déduire que la suite définie par $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + t^k)$ est convergente.
    (c) On considère la suite v définie par ses deux premiers termes v_0, v_1 tels que $0 < v_0 < v_1$ et la relation de récurrence :
    $$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = v_{n+1} + t^n v_n.$$
    Montrer que la suite v est convergente. D1-111

29. Convergence et somme de la série de terme général $\frac{\cos nx}{2^n}$. D1-131