1. **Soit A triangulaire par blocs. A quelle condition est-elle inversible ? Prouver que, si elle existe, A^{-1} est triangulaire par blocs.**
2. **Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases. Prouver que u est une homothétie.** a7-083
3. **Prouver qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est de rang 1 si et seulement si il existe $(B, C) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{C})$ tel que $A = BC$, $B \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, $C \neq 0_{\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{C})}$.**
   Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ de rang 1. Prouver que $A^2 = (\mathrm{tr}A)A$ et calculer A^p puis $(I_n + A)^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.
4. **Soit $D = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$ avec $a_1, .., a_n$ distincts dans $\mathbb{K}$. Prouver que A commute avec D si et seulement si $A \in \mathbb{K}[D]$.**
5. **Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ fixée et soit Φ l'application de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ dans lui-même définie par $\Phi(X) = AX + XA$. Déterminer la trace de Φ en fonction de celle de A.**
6. **A et B étant donnés dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, résoudre l'équation $X + \mathrm{tr}(X)A = B$ où l'inconnue X est dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.** A7-049

---

7. (a) *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle.*
   Démontrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle. (On pourra raisonner par récurrence sur n).
   (b) *Soit $D \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont distincts et $u : \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ défini par $u(M) = DM - MD$. Etudier $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.*
   En déduire que toute matrice de trace nulle est de la forme $XY - YX$, $(X, Y) \in \mathscr{M}_n^2$ (ie "est un commutateur").
   Dans le cas $n = 2$, pour (a, b) donné, chercher (X, Y) avec Y diagonale tel que $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = XY - YX$; en déduire une méthode de calcul de (X, Y).
   Exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} -15 & 27 & -37 \\ 4 & -11 & 12 \\ 10 & -20 & 26 \end{pmatrix}$, déterminer (X, Y).

   Mines a7-050
8. *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétrique.*
   (a) *On suppose $a_{12} \neq 0$, et on décompose A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} J & U \\ -{}^tU & V \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$.*
   Soit $P = \begin{pmatrix} I_2 & -J^{-1}U \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$. Montrer que P existe et est inversible.
   Calculer AP. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = 2 + \mathrm{rg}({}^tUJ^{-1}U + V)$.
   (b) *Dans le cas général, montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.* a7-082
9. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'ordre p, $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$ et $F = Vect\left(f^{(k)}(a)\right)_{k\in\mathbb{N}}$.*
   (a) *Prouver que $\left(f^{(k)}(a)\right)_{k\in [\![0,p-1]\!]}$ est une base de F.*
   (b) *Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(f^{(p-1)}(a)) \neq 0$; prouver que φ existe. Soit $H = \{x \in E / \forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi \circ f^k(x) = 0\}$; démontrer que H est un supplémentaire de F stable par f.*
   (c) *Décrire la matrice de f dans une base adaptée à $F \oplus H$.*
   Prouver qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$ vérifie $a_{i,j} = 0$ si $j \neq i + 1$ et $a_{i,i+1} \in \{0, 1\}$. A7-80

---

10. Soit $(X_i)_{1\leq i\leq p}$, p matrices de $\mathscr{M}_{1n}(\mathbb{R})$ formant une famille libre, $(Y_j)_{1\leq j\leq q}$, q matrices de $\mathscr{M}_{1n}(\mathbb{R})$ formant aussi une famille libre ; montrer que la famille des $({}^tY_jX_i)$ est une famille libre. *CCP* a7-103
11. Montrer que $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ admet une base formée de projecteurs. A7-076

12. Soit A et B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.
On suppose que $A + B = AQ(B)$.
    (a) Montrer que, si $Q(B) - I_n$ est inversible, alors A et B commutent.
    (b) Montrer que $\mathrm{rg}(AB - BA) + \mathrm{rg}(Q(B) - I_n) \leq n$.

    Mines a7-092
13. Soit P la matrice de passage de $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ vers $((X-1)^k)_{0 \leq k \leq n}$; calculer P et P^{-1}. A7-74
14. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
    (a) Calculer les puissances successives de J.
    (b) Soit A l'espace vectoriel engendré par les puissances successives de A. Prouver que A est un anneau. Déterminer ses éléments inversibles.
    (c) On pose $K = I_3 - J + J^2$. Soit A_1 l'ensemble des matrices L carrées d'ordre 3 sur $\mathbb{C}$ telles que $KL = LK = L$. Prouver que A_1 est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Est-ce un anneau ? Est-ce un corps ? a7-4
15. Soit $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre n et A une matrice symétrique de $\mathcal{A}$. Prouver que tout élément M de $\mathcal{A}$ peut s'écrire sous la forme $M = X + AY$, où X et Y sont des éléments de $\mathcal{A}$ et où $AX = 0$. Cette décomposition est-elle unique ? a7-6
16. Dans E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $f_1, f_2, ...f_n$ n endomorphismes nilpotents et deux à deux permutables.
Montrer que : $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ ... \circ f_n = 0$. A7-060
17. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id$.
    1. Montrer que, si $(x_1, .., x_p, f(x_1), .., f(x_{p-1}))$ est une famille libre, alors $(x_1, .., x_p, f(x_1), .., f(x_{p-1}), f(x_p))$ est aussi une famille libre de E.
    2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.
    3. Montrer qu'il existe un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id$ si et seulement si n est pair.

    Centrale a7-088
18. Trouver les matrices A, carrées d'ordre n, telles que A^2 ait une diagonale de 1 au-dessus de la diagonale principale et des 0 partout ailleurs. *Mines* a7-091