1. Avec Maple : pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X+\frac{1}{X}) = X^n+\frac{1}{X^n}$.
   Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n.
   Établir une relation liant P_{n-1}, P_n et P_{n+1}.
   Avec Maple, tracer simultanément les graphes de P_i, $i \in [1,5]$, pour $x \in [-2,2]$. En déduire une conjecture quant aux racines de P_n puis montrer cette conjecture.
   Décomposer $\dfrac{1}{P_n}$ en éléments simples. Afficher la décomposition de $\dfrac{1}{P_i}$ pour $i \in [1,5]$, avec Maple. Connaissez-vous une commande Maple qui décompose une fraction rationnelle en éléments simples ?
   Cent O16-065
2. Avec Maple : montrer que $N(A) = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Écrire la procédure qui donne cette norme pour $n = 4$ et écrire la norme des matrices $A = (a_{ij}) = (i+j)$, $B = (b_{ij}) = (ij)$, $C = AB$ et $D = (d_{ij}) = (i-j)$.
   Montrer que $\mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n}N(A)$.
   Montrer que $\forall O \in O_n(\mathbb{R})$, $N(OA) = N(AO) = N(A)$ et montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.
   Montrer qu'il existe une unique matrice H symétrique telle que $N(A-H) = \inf\{N(A-M),\ M \text{ symétrique}\}$. Donner cette matrice H et la valeur de $N(A-H)$ en fonction des coefficients de A.
   Trouver deux autres normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner les « meilleurs coefficients d'équivalence ».
   Cent O16-070
3. Avec Maple : résoudre $(x^2-x)y'' - 3xy' + 3y = 0$ sur $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,+\infty[$, $]-\infty,0[$, $]-1,+\infty[$ et enfin sur $\mathbb{R}$.
   Chercher les solutions développables en série entière et donner leur rayon de convergence.
   Résoudre le problème de Cauchy $y(1) = a$, $y'(1) = 1$ (? ?) et tracer les solutions pour $a \in \{-1,-0.9,\ldots,0.9,1\}$
   Cent O16-071
4. À l'aide de Maple, tracer $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$; étudier ses symétries, calculer sa longueur et son aire.
   Pour tout $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, calculer les coordonnées du centre de courbure $I(t)$, défini dans le repère de Frenet par $\overrightarrow{M(t)I(t)} = R(t)\overrightarrow{N(t)}$ puis superposer la courbe qu'il décrit avec la courbe initiale.
   On divise la branche $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$ en n segments de longueurs égales, délimités par les points $M_0 = M(0), M_1 = M(t_1), \ldots, M_n = M$
   le logiciel de calcul indique-t-il que la suite $S_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} OM_k$ converge ? Calculer son expression en fonction de n, montrer qu'elle converge et calculer sa limite exacte.
   Cent O16-075
5. (a) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(3+t^2)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que I_n est bien définie. Donner I_1 et I_2 grâce à Maple.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre les termes de la suite (I_n).
   (c) Etudier la convergence de (I_n) et celle de $\sum \dfrac{I_n}{n^a}$ où $a \in \mathbb{R}$.
   (d) Soit $(C_b) : 3x^2 + 4y^2 + 2bx - b^2 = 0$. Tracer (C_1) et (C_2) avec l'ordinateur.
   (e) Trouver une équation polaire de (C_b) puis décrire la courbe obtenue.
   (f) Calculer $\displaystyle\iint_K \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ où K est l'intérieur de la courbe (C_b).
   Centrale-Grab O16-960
6. On note $f_1 : (x,y,z) \mapsto 5x^2 - 8xy + 4xz + 5y^2 + 4yz - z^2$
   et $f_2 : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$.
   (a) Pour tout $X \in \mathbb{R}^3\backslash\{\overrightarrow{0}\}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ calculer $\dfrac{f_1(\lambda X)}{f_2(\lambda X)}$. Démontrer que f_1/f_2 est bornée sur $\mathbb{R}^3\backslash\{\overrightarrow{0}\}$.
   (b) Déterminer les extremums de f_1/f_2 sur cet ensemble.
   (c) Soit $k \in \mathbb{R}$. Préciser la nature de la courbe H_k de $\mathbb{R}^2$ d' équation :
   $H_k : \dfrac{f_1(x,y,0)}{f_2(x,y,0)} = k$.
   Cent-Demon O16-961

7. Soit f endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 59 & -26 & 10 \\ 188 & -83 & 32 \\ 140 & -62 & 24 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}$ de E. Déterminer les droites stables par f.
   Soit P un plan d'équation (coordonnées dans $\mathcal{B}$) $ax + by + cz = 0$.
   On note φ l'application qui à un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées x, y, z dans $\mathcal{B}$ associe $\varphi(\overrightarrow{u}) = ax + by + cz$.
   Montrer que P est stable par f si et seulement si il existe un réel k tel que $\varphi \circ f = k\varphi$. En déduire que P est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$. Déterminer tous les plans stables par f.
   Cent-Demon O16-962
8. *Incomplet*
   Avec Maple : montrer que l'ensemble E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles qu'il existe un entier n vérifiant $f(x) = o(x^n)$ en $+\infty$, est un espace vectoriel contenant les fonctions réelles continues et bornées, ainsi que $\mathbb{R}[X]$.
   Montrer que $< f, g >= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour $<\,,\,>$.
   Déterminer P, projection orthogonale de cos sur $\mathbb{R}_2[X]$ et représenter $\cos - P$ sur $[-1, 1]$. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(\cos x - P(x)\big)\,\mathrm{d}x$.
   Cent O16-C038
9. Trouver un repère dans laquelle $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz = 1$ se met sous forme canonique. Quelle est la nature de cette surface ?
   En donner une représentation paramétrique dans le nouveau repère, puis en déduire une représentation paramétrique dans le repère initial. La tracer.
   Étudier l'ensemble des points où le plan tangent contient $(0, 0, 1)$ et le tracer.
   Cent O16-C043
10. I) Soit $u_n = \sin\Big(\pi(2 + \sqrt{3})^n\Big)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
    Donner les 30 premiers termes de la suite (S_n) avec Maple.
    Que dire sur (u_n) ? Montrer cette conjecture en comparant avec $u_n = \sin\Big(\pi(2 - \sqrt{3})^n\Big)$.
    II) Tracer $g(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ avec Maple.
    Montrer que, $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $N(x, y) = \max(|x|, |y|) \geq M$ implique $g(x, y) \geq A$.
    Donner l'équation du plan tangent en un point de $z = g(x, y)$ et en tracer quelques uns sur le graphe.
    Donner les minimums locaux.
    Existe-t-il un minimum global ? Si oui, le trouver.
    Cent O16-C046
11. Calculer, avec Maple, la dérivée d'ordre n, pour $1 \leq n \leq 10$, de f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
    Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(x) = x^{2n}\mathrm{e}^{1/x}f^{(n)}(x)$ pour tout $x > 0$. Calculer P_n pour $1 \leq n \leq 10$.
    Donner le degré et le coefficient dominant de P_n.
    Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$.
    Tracer P_n pour $1 \leq n \leq 10$ et calculer le nombre de racines de P_n.
    Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(]-a, a[)$ $(a > 0)$ telle que, pour tout $x \in]-a, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g^{(n)}(x) \geq 0$. Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale, que $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$ pour tout $x \in]-a, a[$.
    Soit x_n la plus petite racine positive de P_n. Étudier la suite (x_n).
    Cent O16-C051
12. Avec Maple : soit $B \in \mathbb{R}^n$, A une matrice carrée d'ordre n dont aucun coefficient diagonal n'est nul.
    Pour $U \in \mathbb{R}^n$ donné, on considère la suite (Y_m) définie par $Y_0 = U$ et $Y_m = (y_i^{(m)})_{1 \leq i \leq n}$ avec $y_i^{(m+1)} = \dfrac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j \neq i} a_{i,j}y_j^{(m)}\right)$.

Montrer que si (Y_m) converge, alors la limite est solution du système $AX = B$.
Calculer les 20 premiers termes d'une telle suite avec :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} -12 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 13 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 15 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & -17 \end{pmatrix}$ (on pourra introduire $D = diag(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$ et la fonction qui prend en argument A, B, X et qui renvoie $D^{-1}\big(B - (A - D)X\big)$).
Donner une CNS sur A pour que la suite $(Y^{(m)})_m$ converge quelque soit U.
Cent O16-C054

13. Avec Maple : soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.
Montrer que $\Phi(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est bien définie, que c'est une forme linéaire sur E, et calculer l'image par Φ des éléments de la base canonique pour $n = 4$.
Pour $P \in E$, montrer que $\psi(P) = \displaystyle\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} P\Big(\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}\Big)$ est une forme linéaire, et calculer les images des éléments de la base canonique pour $n = 4$. Que peut-on en déduire ?
Soit $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{p+1} = 2XT_p - T_{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que la famille $(T_p)_{0\le p\le 2n-1}$ est une base de E.
Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $T_p(\cos t) = \cos(pt)$.
Calculer $\Phi(T_p)$ et $\psi(T_p)$.
Donner une expression de $\Phi(P)$ pour $\deg(P) \le n - 1$.
Cent O16-C056