1. Pour cet oral, on dispose de Maple.

   Trouver les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Trouver A^{-1}.

   Trouver une matrice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = A$. Trouver toutes les matrices X vérifiant cette égalité. O08-105

2. Donner le développement en série entière de $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$ au voisinage de 0. Calculer $f(0)$ avec Maple. O10-99

3. Rechercher les solutions de $y" + e^{-x}y = 0$ sous la forme de série entière $\sum a_n x^n$; obtenir une relation de récurrence sur les a_n puis écrire une procedure permettant de calculer a_n en fonction de a_0 et a_1.
   Vérifier que les solutions trouvées conviennent (On pourra considérer $M_n(x) = \sup(a_0, a_1 x, ..., a_n x^n)$ que l'on majorera) O10-115

4. (I) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$; à quelle condition la série de terme général

   $$n + a\sqrt{n^2+n+1} + b\sqrt{n^2-n+2} + c\sqrt{n^2+n+3}$$

   est-elle convergente ?

   (II) Déterminer $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial f}{\partial y} = \gamma f$. On pourra regarder $f(x+ay, x+by)$. O10-131

5. Montrer que si A et B sont des matrices réelles symétriques et positives telles que $B^2 = A$, alors A et B se diagonalisent dans la même base.

   Application avec Maple à $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *Cen 46* O10-900

6. Quel est le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!}$?

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine D.
   Montrer que $f(x+1) = xf(x) + \dfrac{1}{e}$.
   Sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que f est positive et décroissante et donner un équivalent en 0 et en $+\infty$.
   Tracer le graphe de f entre -1 et 0. O11-95

7. Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x(1-x)$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que

   $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \sin(n\pi x)$.

   Montrer que $\sum a_n^2$ converge et donner une valeur approchée de la somme à l'aide de Maple. Déterminer cette somme. *Centrale* O11-101

8. Soit $a > 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_x^y e^{t^2}\ \mathrm{d}t = a$ (on pourra étudier la fonction $F : x \to \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t$) ; on pose $y = f(x)$.

   Montrer que $x = -f(-y)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?
   Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?
   Tracer la courbe représentative de f avec Maple dans le cas $a = 2$. O13-063

9. I) Extremums éventuels de $f(x,y) = xy(1-x^2-2y^2)^{\frac{1}{2}}$ et calcul de leur valeur.

   II) Intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{t-1}{(t-z)^3}$ avec $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, et valeur de l'intégrale. O13-065

10. I) Avec Maple, étude de $f(x) = x - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$: définition, dérivabilité, continuité, asymptote, développement asymptotique et limite en 0.

    II) Domaine de définition de $U_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$, puis donner la limite de (U_n) en l'infini. O13-067

11. Avec Maple : L'ensemble E des fonction continues de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale du carré entre 0 et 1 existe, est-il un espace vectoriel ?

Montrer que $< f, g >= \int_0^1 fg$ en fait un espace préhilbertien réel.

Pour tout n et m entiers naturels, $t^m \big(\ln(t)\big)^n$ appartient-elle à E ?

Expliciter $I_{m,n} = \int_0^1 t^m \big(\ln(t)\big)^n \; \mathrm{d}t$.

Montrer que $f(x, y, z) = \int_0^1 \ln(t) - x - yt - zt^2 \; \mathrm{d}t$ a un minimum unique, donner ses coordonnées et sa valeur. Tracer alors sur un même graphe $\ln(t)$ et $x + yt + zt^2$ entre $0,005$ et 1. O13-068

12. Soit a, b, c trois réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$.

    On cherche à savoir s'il est possible d'avoir à la fois $a > b > 1 > c$ et $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\cdot$

    Calculer la matrice jacobienne de f définie par :

    $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy} - (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy)$.

    A l'aide du logiciel de calcul formel, représenter la surface d'équation $z = f(x, y)$ sur le domaine approprié à la résolution du problème.

    Conclure quant au problème posé en étudiant éventuellement f.

    Représenter f dans la fenêtre $[-2, 2]^3$. O13-080

13. Avec Maple : le système $S \begin{cases} x' = -2x + xy \\ y' = 2y - xy \end{cases}$ admet-il des solutions simultanément constantes ? Résoudre S pour $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = 0$.

    Montrer l'existence et l'unicité d'une solution telle que $x(0) = 3$ et $y(0) = 1$; Maple peut-il donner $x(t)$ et $y(t)$? Montrer que x et y sont strictement positives.

    Soit F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(u, v) = u^2 v^2 \mathrm{e}^{4-(u+v)}$.

    Montrer que $F(x, y) = 9$ et tracer $F(u, v) = 9$ avec Maple.

    On admet qu'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $x(t + T) = x(t)$ et $y(t + T) = y(t)$.

    Montrer que x et y sont T-périodiques.

    Calculer $\frac{1}{T} \int_0^T x(t) \; \mathrm{d}t$ et $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) \; \mathrm{d}t$. O14-048

14. Ensemble de définition et monotonie de la somme f de la série de fonctions $u_n(x) = \exp(-x\sqrt{n})$ pour x réel et n entier non nul.

    Tracer f avec Maple, donner sa limite en $+\infty$, un équivalent en 0.

    Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et exprimer son intégrale à l'aide d'une somme de série. En donner une valeur approchée.

    En déduire, à l'aide de Maple, un équivalent de f en $+\infty$ et démontrer le résultat obtenu. O14-049

15. Pour a réel positif, étudier $f_a(x, y) = x + y - (x^2 + y^2 + ay)$ sur $0 < x < 1$; $0 < y < 1$; $x + y < 1$. Montrer que $f > 0$.

    Représenter la surface sur Maple.

    Discuter selon que $0 < a < 2$ ou $2 < a$, l'existence d'extrema, leur valeur, $f(x, y) = 0$. O14-050

16. Montrer que les conditions $x(0) = -2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x(n) < 0$ et $x(n) - x(n)^2 = x(n-1)$ définissent une suite et étudier sa limite éventuelle. Soient :

    $u(n) = x(n+1) - x(n)$, $v(n) = \ln\big(1 + u(n)\big)$ et $w(n) = \prod_{k=0}^{n} 1 + u(k)$.

    Etudier la convergence des séries de terme général $u(n)$ et $v(n)$ puis celle de la suite $w(n)$.

    Au cas où la série de terme général $v(n)$ est convergente, donner à 10^{-2} près, à l'aide de l'outil informatique, une valeur approchée de la série $\sum v(n)$ ou de la suite $(w(n))$. O14-052

17. Soit f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\cdot$

    Vérifier que $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} \cos(nx)}{n^2}$ sans puis avec l'aide de Maple.

    Montrer que $g(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} \cos(nx)}{n^2(n^2+1)}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[-\pi, \pi]$ puis tracer g avec Maple.

    Trouver une équation différentielle vérifiée par g et faisant intervenir f ; en déduire g.

Comment calculer $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ à l'aide des questions précédentes ? O14-055

18. Soit (u_n) dans $\mathbb{C}$ définie par $u_{n+2}=(n+1)u_{n+1}-(n+2)u_n$.
Ë l'aide de Maple, calculer u_n pour $0\leq n\leq 10$ quand $u_0=u_1=-1$ puis quand $u_0=1$, $u_1=2$.
On suppose que $f(z)=\sum u_n z^n$ existe : trouver une équation différentielle permettant de déterminer f.
On suppose que $\sum \frac{u_n}{n!}z^n$ existe : comparer avec le cas précédent et conclure. O14-056

19. Avec ordinateur : Etudier les variations de $f(t)=\frac{\ln(1+t)}{t}$ et $g(t)=\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$ pour $t>0$.
Montrer que $u_n=\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ est définie.
Montrer que la suite (nu_n) converge et calculer sa limite I.
Montrer que la suite de terme général $v_n=n(nu_n-I)$ est à valeurs négatives et non bornée.
u_n admet-elle un développement limité à l'ordre 2 en $+\infty$? O14-058

20. Soit $f(x,y)=\int_{1/x}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^y)}$. Etudier f. O14-900

21. Prouver que toutes les dérivées de arcsin sont positives sur $\mathbb{R}_+$. O14-901

22. Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Soit (C) la courbe définie par la représentation paramétrique
$$\left(x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ y=t\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$
   (a) Effectuer un tracé de (C) à l'aide de Maple.
   (b) Déterminer une équation cartésienne ou polaire de (C).
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres t_1,t_2,t_3 distincts deux à deux pour que les points correspondants de (C) soient alignés (les calculs pourront être assurés par Maple)
   (d) Soit $A=(1,0)$. Montrer que, pour toute droite passant par A et coupant (C) en M et M', le cercle de diamètre $[M,M']$ est tangent à l'axe Ox en O.

   Centrale 01 O14-902

23. Soit (C) une conique de foyer F, de directrice associée (D) et d'excentricité e.
Donner une description polaire $M=M(\theta)$ de la conique (C) dans un repère orthonormé $R=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ à préciser.
Ecrire une fonction Maple permettant de réaliser le tracé de (C).
Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, la droite $(F,M(\theta))$ coupe la conique (C) en deux points distincts $M_1=M(\theta)$ et M_2. Soit $\mathcal{T}_\infty$ la tangente à (C) en M_1, $\mathcal{T}_\in$ la tangente à (C) en M_2 et N le point d'intersection de $\mathcal{T}_\infty$ et $\mathcal{T}_\in$.
   (a) Définir une méthode permettant de donner une équation de $\mathcal{T}_\infty$: on pourra par exemple se placer dans le repère $R_\theta=(O,\overrightarrow{i_\theta},\overrightarrow{j_\theta})$ obtenu comme image de R par la rotation de cebtre O et d'angle θ. Ecrire une fonction Maple effectuant le tracé de $\mathcal{T}_\infty$ en fonction de θ.
   (b) Effectuer le même travail avec M_2 et $\mathcal{T}_\in$.
   (c) En déduire une expression de $N=N(\theta)$ et étudier la courbe correspondante. Illustrer avec Maple.

   Centrale 00 O14-903

24. On pose $P=2X^3-X^2-X-3\in\mathbb{C}[X]$.
   (a) Déterminer avec Maple les racines de P. On note A,B,C leurs images (l'affixe de C est réelle) et D et E les images des racines du polynôme dérivé P'. Montrer que ces dernières sont à l'intérieur du triangle ABC dans $\mathbb{C}$.
   (b) Donner une équation de l'ellipse de foyers D et E tangente à (AB). Tracer cette ellipse avec Maple ainsi que le triangle ABC. Qu'observe-t-on ? Le montrer.

   Centrale 99 O14-904

25. Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Soit (C) la courbe définie par la représentation paramétrique
$$(x=\frac{t}{1+t^4}\ ,\ y=\frac{t^3}{1+t^4})$$
   (a) Effectuer un tracé de (C) à l'aide de Maple.

(b) Déterminer une équation cartésienne ou polaire de (C).

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres t_1, t_2, t_3 distincts deux à deux pour que les points correspondants de (C) soient alignés (les calculs pourront être assurés par Maple)

Centrale 00 O14-905

26. Soit $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (2+n)u_n\}$, $F = \{u \in E \ / \ u_0 = u_1\}$, $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C}^2 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{C} \\ (u_n) & \mapsto & u_0 \end{array}$.

(a) Structure de ces espaces ?

(b) Que peut-on dire des applications ? En déduire $\dim E$ et $\dim F$.

(c) Soit $(a_n) = \varphi^{-1}((1,2))$, $(b_n) = \psi^{-1}(-1)$. Calculer avec Maple les 10 premiers termes de ces suites.

(d) Soit $f(x) = \displaystyle\sum_0^{+\infty} b_n x^n$, série entière de rayon de convergence non nul. Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 1. La résoudre avec Maple.

(e) En déduire b_n.

E.Hou O14-906

27. (I) Soit $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$un ensemble fini de cardinal n. Soit $A \subset E$ de cardinal p.
On cherche les cardinaux des ensembles
$\{B \in \mathcal{P}(E)/A \cup B = E\}$; montrer que c'est 2^p ;
$\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2/A \cup B = E\}$;
$\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2/A \cap B = \emptyset\}$.
Ecrire une procedure donnant ces cardinaux.
(II) Soit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Chercher $M \in E$ tel que $MB =^t MB$. Dimension de cet espace.

(b) Soit $E = \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$, $n \leq m$ et $(B_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathscr{M}_{m,1})^n$. Dimension de l'ensemble des matrices $M \in E$ telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad {}^t M B_i = M B_i$.

E.Hou O14-907

28. On va utiliser et établir la formule suivante

$$\int_a^b f(t) \, dt = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f(\frac{a+b}{2}) \right) + \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\alpha) \qquad (1).$$

(a) Soit $\varphi(t) = \exp(-t^2)$. Trouver avec Maple le maximum de $|\varphi^{(4)}|$ sur $[0, 2]$.
En utilisant la formule, montrer que $\displaystyle\int_0^2 \exp(-t^2) \, dt$ est approximativement égale à $P(e^{-1})$ avec P un polynôme et exprimer un majorant E de l'erreur.
Avec Maple, donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^2 \exp(-t^2) \, dt$, $P(e^{-1})$ et E.

(b) f est supposée de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-1, 1]$. Soit $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^x f(t) \, dt - \frac{x}{3} \left(f(x) + f(-x) + 4f(0) \right) - \frac{x^5}{90} A$ où A est tel que $g(1) = 0$.
Prouver que g est impaire et trouver une expression de A en appliquant 5 fois le théorème de Rolle.
En déduire la formule (1).

A.Dec O14-908

29. (I)

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ définit une fonction g continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Résoudre l'équation différentielle $y''(x) - y(x) = g(x)$.

(c) Montrer que l'équation admet une unique solution y_0 bornée sur $\mathbb{R}$.

(d) Tracer avec Maple y_0 sur $[0, 2\pi]$.

.

(II) Soit a un réel positif non nul, f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x) \leq \displaystyle\int_0^x f$.

(a) Montrer que f est nulle sur le segment $[0,1]$.

(b) Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

G.Bar O14-911

30. (I) Avec Maple :

Soit $b > a > 1$. Calculer l'intégrale double de la fonction $f : (x,t) \mapsto \dfrac{1}{x - \cos t}$ sur $[a,b] \times [0,\pi]$.

(II) Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles, nulles en 0 et en 1.

(a) Pour $\varphi \in E$, montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\left|\int_0^1 \varphi\right| \leq K. \max\limits_{x\in[0,1]} |\varphi''(x)|$.

(b) Déterminer le minimum de l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tels que $\left|\int_0^1 \varphi\right| \leq \alpha. \max\limits_{x\in[0,1]} |\varphi''(x)|$.

(c) Soit F l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^4$ sur le carré $C = [0,1] \times [0,1]$ à valeurs réelles, nulles sur le bord du carré.
Soit $\delta C = \{(x,y) \in C / xy(1-x)(1-y) = 0\}$.
Montrer l'existence de $M_f = \max\limits_{(x,y)\in C} \left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y}(x,y)\right|$.

(d) Montrer que, pour $f \in F$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\iint_C f \leq M_f K$.

(e) Trouver le plus petit K (cad le meilleur) satisfaisant la relation précédente.

N.Gar O14-912

31. (I)

(a) Montrer que l'équation $\tan(nx) = \dfrac{1}{2x}$ admet une solution $\alpha_n \in]0, \dfrac{\pi}{2n}[$ et une seule.

(b) Trouver un équivalent de α_n quand $n \to +\infty$. Peut-on être plus précis ? Discuter avec *Maple.*

(II)

(a) Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Trouver tous les P tels que $x \mapsto \sqrt{P} - (x^2 - x + 1)$ soit intégrable au voisinage de $+\infty$.

(b) Quels sont ceux qui sont à valeurs positives sur $\mathbb{R}$?

O14-914

32. Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence R à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Soit $m \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}$ tel que $p < m$ et $\rho = e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

(a) Peut-on définir, pour $|z| < R$, $S_p(z) = \sum\limits_{n\geq 1} a_{mn+p} z^{mn+p}$?

(b) On cherche à écrire S_p sous la forme $S_p(z) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \lambda_k S(\rho^k z)$.

Montrer que nécessairement $\forall r \in [\![0, m-1]\!]$ $\sum\limits_{k=0}^{m-1} \lambda_k \rho^{rk} = \delta_{rp}$.

Démontrer l'unicité des solutions de ce système.

(c) Etudier avec *Maple* pour $m = 2, 3$.

O14-915

33. Soit I un intervalle ouvert contenant l'origine. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable en 0.

(a) On considère la suite (σ_n) définie par $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$. Montrer que cette suite converge vers $f'(0)/2$.

(b) Soit ζ un réel et $\Omega_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + \dfrac{k\zeta}{n^2}\right)$. Etude de la suite (Ω).

(c) Vérifier avec Maple la convergence de cette suite.

(d) Que peut-on dire si ζ est complexe ?

O14-918

34. (A) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T : X \mapsto XA - AX$.

Eléments propres de T.

Base B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $mat(T, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(B) Avec Maple : Aire d'un tore d'axe de révolution Oz, d'arc le cercle de centre $(0, 0, 1)$ de rayon $a < 1$. O14-919

35. [A]

(a) Soit (y_n) une suite de fonctions paires, telle que y_n est constante sur le segment centré en 0 de longueur $1/n$, nulle en dehors de ce segment et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1. Convergence simple, uniforme de (y_n) ?

(b) Soit, s'il existe $(f \star g)(x) = \displaystyle\int_{\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)\ \mathrm{d}t$

Que vaut la limite de $f \star y_n$ quand $n \to +\infty$?

Soit g bornée sur $\mathbb{R}$ continue et f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \star g$ existe. $f \star g$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

Montrer que $f \star g = g \star f$.

[B] Avec Maple : Nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}\right)$. O14-920

36. (I)

(a) Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer qu'il existe $g \in GL(E)$ et p projecteur tel que $f = g \circ p$.

(b) Application : Factoriser $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(II) Avec Maple.

Soit $(C)\quad x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 10y + 9 = 0$.

(a) Tracer (C). Donner son foyer, les intersections avec les axes, les tangentes en ces points.

(b) Calculer la longueur de l'arc de (C), ensemble des points de (C) d'abscisse négative. O14-922

37. (I)

(a) Calculer les 30 premiers termes du développement limité en 0 de $\varphi(x) = \tan(\tanh(x)) - \tanh(\tan(x))$.

(b) f et g sont deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$, équivalentes à $x \mapsto x$ en 0 et impaires.
Déterminer le développement limité en 0 d'ordre 7 de $\psi(x) = f(g(x)) - g(f(x))$.

(c) a et b sont deux fonctions continues en 0 telles que $a(0) = b(0) = 3$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[a(x)]^{b(x)} - [b(x)]^{a(x)}}{a(x) - b(x)}$.

(II) $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^3)^n}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$. O14-923

38. Soit $(E)\quad yy' - 2y + x = 0$. Etude de y, solution maximale sur $]A, B[$.
Monotonie, concavité, nature de A et B, comportements de y et y' en A et B.
Tracé avec Maple d'une solution particulière. O14-924

39. (I) Soit deux suites u et v à termes dans $\mathbb{R}_+$ telles que $u_n \sim v_n$.

Montrer que, si v_n converge, alors $\displaystyle\sum_{k>n} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k>n} u_k$.

(II) Soit $a_n = 2\sqrt{n} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

(a) Montrer que (a_n) converge vers une limite finie L.

(b) Trouver un équivalent de $L - a_n$ en $+\infty$. O14-926

40. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum a_n x^n$ où

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t - 1)(t - 2)...(t - n)\ \mathrm{d}t$$

O14-928

41. Montrer que $f(x,y)=\dfrac{xy}{1+e^{x^2+2y^2}}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Donner une valeur approchée de sa borne supérieure. O14-929

42. Qu'obtient-on à l'aide de l'outil informatique pour :
$g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $h(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$?
Montrer que g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ et étudier leur parité.
Montrer que h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer h' en fonction de g.
Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer g' et l'exprimer en fonction de h et g. En déduire une équation différentielle dont g est solution.
En déduire g puis h.
Représenter graphiquement g et h à l'aide de l'outil informatique. O14-C100

43. Avec Maple : Soit $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{5+4\cos t}\,\mathrm{d}t$.
Calculer I_0 et I_1. Donner une relation entre I_n, I_{n+1} et I_{n+2}.
En déduire I_n en fonction de n.
Trouver une fonction f paire, 2π-périodique, dont les coefficients de Fourier sont les I_n.
Tracer f et la somme partielle de Fourier jusqu'à $n=4$. O14-C102

44. Avec Maple : on note $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f'' s'annule et change de signe sur $]\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+(k+1)\dfrac{\pi}{2}[$ en un seul point x_k. Soit I_k le point $\big(x_k,f(x_k)\big)$ de la courbe de f.
Tracer simultanément sur $[0,10]$, les courbes de f et de h définie par $h(x)=-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x$.
Déterminer la tangente en I_k et vérifier qu'elle est aussi tangente à la courbe d'équation $\dfrac{1}{4}x^2+y^2=1$. O15-054

45. Avec Maple : montrer que si f est solution de $xyy'-xy-x^2-y^2=0$, elle ne peut s'annuler qu'en 0. Que donne le logiciel comme solution ?
Soit f une solution définie sur un intervalle $J\subset\mathbb{R}^*$; quelle équation différentielle vérifie $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$?
A-t-on une solution pour g ?
Trouver une équation (non différentielle) vérifiée par g puis par f.
En paramétrant les solutions, étudier et tracer g telle que $g\big(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\big)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. O15-055

46. Avec Maple : pour $a\in\{-2,-\dfrac{3}{2},-1,0,1,\dfrac{3}{2},2\}$, tracer Γ, la courbe d'équation $\begin{cases}x=\cos^3 t+a\sin t\\ y=\sin^3 t+a\cos t\end{cases}$
Trouver les deux symétries qui permettent de réduire l'étude à un intervalle I de longueur $\dfrac{\pi}{2}$ à préciser.
Dans quel intervalle J prendre a pour que Γ possède des points singuliers ? Préciser dans ce cas l'ensemble E que décrivent ces points et le tracer sur Maple. Donner les variations de x et y. O15-056

47. Représenter $S_1 : x^2+y^2+z^2=R^2$ et $S_2 : x^2-Rx+y^2=0$ à l'aide de Maple et les reconnaître. Donner les symétries de $C=S_1\cap S_2$. Quels en sont les points réguliers ? Donner l'équation et un vecteur directeur de la tangente en M à C. Paramétrer C. O15-059

48. Soit $u_n=\dfrac{1}{64^n}\left(\dfrac{1}{6n+1}+\dfrac{1}{2(6n+2)}+\dfrac{1}{4(6n+3)}-\dfrac{1}{8(6n+5)}\right)$.
Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer, avec Maple, une valeur approchée de la somme. Estimer la vitesse de convergence de la série.
Calculer $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac12}\frac{1}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x$, $I_2=\displaystyle\int_0^{\frac12}\frac{x}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x$,
$I_3=\displaystyle\int_0^{\frac12}\frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.
Trouver $(a,b,\alpha,\beta,\delta)\in(\mathbb{N}^*)^5$ tels que $\alpha I_1+\beta I_2+\delta I_3=\dfrac{\pi}{a\sqrt{b}}$.
Trouver $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\dfrac{\pi}{a\sqrt{b}}=\displaystyle\int_0^{\frac12}\frac{P(x)}{1-x^6}\,\mathrm{d}x$.
Retrouver la valeur exacte de $\sum u_n$.

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$v_n = \frac{1}{4096^n}\left(\frac{1}{12n+1} + \frac{1}{2(12n+2)} + \frac{1}{4(12n+3)} + \frac{1}{8(12n+5)} + \frac{1}{2^6(12n+7)} + \frac{1}{2^7(12n+8)} + \frac{1}{2^8(12n+9)} - \frac{1}{2^9(12n+10)}\right).$$ O15-064

49. Avec Maple : tracer $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ sur $]0,1]^2$; que peut-on conjecturer en $(0,0)$? Le montrer.

Calculer $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, donner une valeur approchée.

Calculer $\displaystyle S_n = \frac{1}{n^3}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{pq}{p+q}$ pour $n \in \{20k,\ k \in [1,30]\}$.

Comparer à la valeur précédente ; que peut-on conjecturer ?

On pose $A_n = n^3 S_n$;

montrer que $\forall n \geq 2,\ A_n - A_{n-1} = 2n\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\big(1 - \frac{n}{p+n}\big) - \frac{n}{2}\cdot$

Calculer la limite de la suite de terme général $B_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+n}\cdot$

Donner un développement asymptotique de B_n en $\dfrac{1}{n}\cdot$

Trouver une suite (γ_n) vérifiant $A_n - A_{n-1} = \gamma_n + o(n)$.

Montrer que $\displaystyle\iint_{[O,1]^2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} S_n$.*Pietri-Centrale* O15-C077

50. Avec Maple : déterminer r et θ pour que $P_r(\theta) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(n\theta)$ converge. Dans ce cas, donner sa somme. Vérifier que $\Delta P_r = 0$.

Soit h une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$; montrer que $g(r,\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)h(t)\ \mathrm{d}t$ vérifie l'équation de Laplace sur le disque ouvert de rayon 1 et centre O.

Vérifier numériquement ou graphiquement que $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} g(r,\theta) = h(\theta)$ puis le démontrer (on remarquera que $h(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(\theta)P_r(t)\ \mathrm{d}t$). O15-C079

51. Avec Maple : on note $u_{nk} = \dfrac{k^n}{k!}$; montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} u_{nk}$ converge pour tout n ; on note A_n sa somme.

Calculer A_0 et A_1 sans Maple, puis A_n, $n \in [2,8]$ et A_{12} avec Maple.

Trouver une relation de récurrence entre A_{n+1} et les A_i pour $0 \leq i \leq n$. Recalculer alors A_{12} et comparer les temps de calcul.

Montrer que, pour $x > 0$, $\displaystyle\sum A_n\frac{x^n}{n!}$ converge et que sa somme est majorée par $f(x) = \exp\big(\exp(x)\big)$ (on pourra raisonner sur la suite des sommes partielles). O15-C080

52. Avec Maple : soit A une matrice réelle, carrée d'ordre n de diagonale nulle et dont tous les autres coefficients valent $a_{ij} = \alpha_j$.

On suppose $\alpha_j = j$: calculer $\det A$ pour $n \in [2,5]$.

Donner les éléments propres de A pour $n = 2$.

Vérifier que, pour $n \in \{3,4,5\}$, A est diagonalisable.

Donner une expression simplifiée de $\det A$ dans le cas général.

On suppose $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$: montrer que t est valeur propre de A si et seulement si $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{t+\alpha_j} = 1$.

Montrer que A est toujours diagonalisable. O15-C083

53. On considère une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant le cercle unité $\mathcal{C}(O,1)$.
On considère le problème $PD(f)$ qui consiste à trouver une fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant le disque unité $\mathcal{D}(O,1)$ qui coïncide avec f sur le cercle unité, et dont le laplacien est nul (ie ...)

(a) Résoudre $PD(f)$ pour $f(x,y) = x$.

(b) Résoudre $PD(f)$ pour $f(x,y) = x^2 - xy^2$.

(c) On prend $f(x,y) = \dfrac{1}{5-3x}$. Vérifier que la fonction $F : (x,y) \mapsto \dfrac{9-x^2-y^2}{4(x^2+y^2+6x+10)}$ est solution de $PD(f)$.
Avec l'ordinateur, tracer le graphe de F au dessus du disque $\mathcal{D}(O,1)$.

Centrale O15-C900

54. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la matrice A_n que voici :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -n+1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) A l'aide de l'ordinateur, déterminer $\mathrm{sp}(A_n)$ pour $2 \leq n \leq 5$.

(b) Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Proposer une conjecture.

(c) Calculer $d_n = \det(A_n)$ pour $2 \leq n \leq 5$, puis évaluer $d_n - d_{n-1}$ pour $3 \leq n \leq 5$. Proposer une conjecture et la démontrer.

(d) En déduire les éléments propres de A_n et sa diagonalisibilité.

Centrale O15-C901

55. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = -4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+2} = 111 - \dfrac{1130}{u_{n+1}} + \dfrac{3000}{u_{n+1}u_n}$.

(a) Calculer, à la'aide de Maple, une valeur approchée des 20 premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer ?
On suppose que la suite (u_n) est bien définie. On définit alors une suite (p_n) par les relations $p_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = u_{n+2}p_n$.

(b) Déterminer une relation de récurrence entre les p_n.
Soit a, b, c trois réels, déterminer la dimension de l'espace vectoriel des suites réelles (v_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+3} = av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n$.

(c) Trouver une base simple de l'ensemble des suites qui vérifient la même relation que (p_n). On recherchera des suites géométriques.

(d) En déduire l'expression de p_n et de u_n. Conclure.

Centrale O15-C902

56. Avec Maple

(a) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
Montrer que (u_n) est convergente. Donner une valeur approchée de sa limité.

(b) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
Montrer que $\sum v_n$ est convergente.
On note $S = \displaystyle\sum_{0}^{+\infty} v_n$ la somme de la série. Donner une valeur approchée de S et majorer l'erreur commise.

(c) Montrer que, $\forall n > 0 \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} v_k = u_{2n+1} - u_n + \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$.
En déduire la valeur exacte de S. Comparer avec le résultat de la question précédente.

(d) On définit une nouvelle suite (w_n) par $w_n = v_{2n} + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} v_{a_n+2i}$ où a_n représente l'indice impair du premier terme de la suite v qui n'apparaît pas dans w_{n-1}. On pose $a_0 = 1$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = a_{n-1} + 2n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = n^2 + n + 1$.

(e) On définit alors $T_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = (v_0+v_1)+(v_2+v_3+v_5)+(v_4+v_7+v_9+v_{11})+....$
Créer des fonctions qui calculenta_n, w_n, T_n.
Peut-on prévoir la limite de (T_n) ?

(f) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n = u_{2n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_{\frac{n^2+3n+2}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{n+2}\right)$.
En déduire un équivalent de T_n. Conclusion sur l'étude menée ?

Centrale O15-C903

57. Avec Maple Tracer sur un même graphique les courbes Γ_λ représentatives de $f_\lambda : x \mapsto \dfrac{x \ln \frac{x}{\lambda}}{1+x^2}$ pour différentes valeurs de $\lambda > 0$.
Donner l'équation de la tangente D_λ à la courbe Γ_λ au point d'abscisse $a > 0$.
Montrer que toutes les droites D_λ sont concourantes en un point $M(a)$ dont on précisera les coordonnées.
Déterminer et tracer l'ensemble des points $M(a)$. *Centrale* O15-C904

58. Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition de I. Calculer $I(x)$ avec Maple et sans Maple. *Centrale* O15-C905

59. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$. Montrer l'existence de I.
Déterminer avec Maple une valeur approchée de I. A-t-on la valeur exacte ?
Soit pour $n \geq 1, I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. Montrer que $\lim I_n = I$.
Soit pour $n \geq 1, a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que la suite (a_n) converge. On note γ sa limite.
Exprimer I_n en fonction de a_n et I en fonction de γ. *Centrale* O15-C906

60. Avec Maple
Soit $f : x \mapsto e^x \cos x - e^{2x}$.
(a) Déterminer les réels α, β, γ tels que $f^{(3)} + \alpha f^{(2)} + \beta f' + \gamma f = 0$.
(b) Déterminer les racines complexes a, b, c du polynôme $P = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.
(c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}, R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par P. Déterminer R_4 et R_5.
(d) Montrer qu'il existe un unique triplet (y_n, v_n, w_n) tel que
$R_n = u_n(X-a)(X-b) + v_n(X-b)(X-c) + w_n(X-c)(X-a)$. Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n.
(e) Montrer que $(f, f', f")$ est une famille libre. Soit $E = Vect(f, f', f")$. Montrer que la dérivation est un endomorphisme de E.
(f) Résoudre l'équation différentielle $y^{(3)} + \alpha y^{(2)} + \beta y' + \gamma y = 0$.

Centrale O15-C907

61. Avec Maple
On définit $(C_1) : x^2 + xy - 2y^2 = 4$ et $(C_2) : xe^x + ye^y = 0$.
(a) Nature de (C_1) ?
(b) Déterminer un élément de symétrie de (C_2).
(c) Tracer (C_1) et (C_2) sur le même graphe. Déterminer card$(C_1 \cap C_2)$.
(d) Trouver, si c'est possible, les coordonnées du(des) point(s) d'intersection avec une approximation à 10^{-3} près.
(e) Soit $f = \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2+xy-2y^2-4, xe^x+ye^y) \end{array}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et déterminer sa matrice jacobienne.
(f) Soit $X_0 = (-2.1, 0)$. On définit $X_{n+1} = X_n - (df_{X_n})^{-1}(f(X_n))$. Calculer X_n pour $n = 1,2,3,4,5$.
(g) ? petit programme final pour calculer une approximation des coordonnées des points d'intersection.

Centrale O15-C908

62. Soit l'équation différentielle $x''(t) - tx(t) = 0 \quad (E)$ où x est $\mathcal{C}^2$ définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) Calcul des solutions de (E) avec l'outil informatique.

(b) Quelle est la structure de l'ensemble des solutions.

(c) Soient les problèmes suivant $P_1 = ((E), x(0) = 1, x'(0) = 0)$ et $P_2 = ((E), x(0) = 0, x'(0) = 1)$. Pourquoi les solutions x_1 et x_2 des problèmes P_1 et P_2 existent-elles et sont uniques ?
Les tracer avec l'outil informatique pour $t = -8..2, 5$.

(d) i. Recherche des solutions de (E) sous forme de série entière.
  ii. Quel est l'ensemble de solutions obtenues.

(e) Soit $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(u * t - \dfrac{u^3}{3})du$.
  i. Tracer f pour $t = -8..2, 5$.
  ii. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $f''(t) + tf(t)$.

Remarque : L'énoncé de cet exercice n'était pas complet ; les questions 5b et 5c avaient été malheureusement oubliées ; la question 5b figurant ici n'est donc qu'une possibilité de fin d'exercice. *Centrale*

O15-C909

63. On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$-x^2y'' - 2xy' + y = \arctan(x)$$

(a) Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $-x^2y'' - 2xy' + y = 0$.

(b) On cherche une solution particulière de l'équation développable en série entière sous la forme $\sum a_n x^n$.
  a) Donner l'expression des a_n pour tout n.
  b) Vérifier les premiers termes avec le logiciel.
  c) Donner le rayon de convergence de la série.
  d) Étudier la convergence en $-R$ et en R.

(c) Trouver une solution particulière de l'équation sous forme intégrale.

(d) Étudier le recollement en 0.

Centrale O15-C910

64. (a) Soit A la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque.
  i. Est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
  ii. Est-il possible qu'elle soit semblable à la matrice suivante $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) Créer une fonction d'argument $n > 2$ retournant la matrice A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$An[i,j] = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \\ (-1)^i & \text{si } j = 1 \\ a & \text{pour } i = 1 \text{ et } 2 \leq j \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Conjecturer à l'aide de Maple si A_n est diagonalisable, trigonalisable, les valeurs propres ... en fonction de n et de a.

Centrale O15-C911

65. (a) Développement en série de Fourier de f définie par $f(x) = |\sin(x)|^5$:
  i. Etude de la convergence de la série de Fourier.
  ii. Calcul des coefficients
  iii. Écrire sur Maple un programme (d'argument N et t) qui renvoie la somme partielle d'ordre N.

(b) Soit E : $y'' + y = |\sin(x)|^5$
  i. Justifier que les solutions de E sont de classe $\mathcal{C}^6$
  ii. Résoudre l' équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$ et en déduire les solutions de E

Centrale O15-C912

66. Soit A une matrice tridiagonale telle que pour tout i, $a_{i,i} = \alpha$, $a_{i,i+1} = -1$ et $a_{i,i-1} = 1$, tous les autres termes étant nuls. Pour $n = 5$ on a donc $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

   (a) Écrire une procédure qui prend pour variables n et α et qui renvoie la matrice A.

   (b) Pour $n = 2..7$ écrire le polynôme caractéristique de A ainsi que son déterminant. En donner une formule générale en fonction de n.

   (c) Soit M une matrice de antisymétrique réelle et λ une valeur propre de M.

      i. Montrer que si λ est réelle, λ est nulle.

      ii. Montrer que les valeurs propres de M sont imaginaires pures (on pourra faire intervenir un produit scalaire hermitien et calculer ${}^t(Mx)\overline{X}$)

      iii. Que pouvez-vous en déduire sur les vecteurs propres de M ?.

   (d) Que pensez-vous de l'assertion : les valeurs propres de A (ou plutôt leurs affixes) sont alignées.

   Centrale O15-C913

67. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ représentant l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Déterminer les éléments propres de u (valeurs propres et sous-espaces propres).

   (b) Donner une famille libre $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :
   - e_1 appartient à $\mathrm{Ker}u$
   - e_2 appartient à $\mathrm{Im}(u)$
   - e_3 vérifie $u(e_3) = e_2$

   Soit T la matrice de u dans cette base. Écrire T.

   (c) i. Trouver toutes les matrices $Z \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $ZT = TZ$.

      ii. Trouver toutes les matrices $Y \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 = T$.

   Centrale O15-C914

68. (a) Soit (E_1) l'équation différentielle $x' = e^{-x}\cos(t)$.

      i. Justifier l'existence de solutions maximales.

      ii. Résoudre P_1 constitué de (E_1) et $x(0) = 0$. Tracer avec Maple la courbe représentative de x_1, solution de (P_1).

   (b) Soit (E_2) l'équation différentielle $x' = -\dfrac{e^x}{\cos(t)}$.

      i. Justifier l'existence de solutions maximales.

      ii. Résoudre P_2 constitué de (E_2) et $x(0) = 0$. Tracer avec Maple la courbe représentative de x_2, solution de (P_2).

      iii. Que peut-on dire des courbes représentant x_1 et x_2 au niveau de leur(s) point(s) d'intersection ?

      iv. De manière plus générale, que peut-on dire des courbes intégrales de (E_1) et (E_2) au niveau de leur(s) point(s) d'intersection ?

   Centrale O15-C915

69. Soit Γ_λ la courbe d"équation $3x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$ dans un repère orthonormé $0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$).

   (a) Identifier les Γ_λ.Qu'est ce qu'elles ont en commun ?

   (b) Soit $\mathcal{C}$ le graphe d'une fonction f. Trouver l'équation différentielle (E) que doit vérifier f pour qu'en tout point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'une des courbes Γ_λ les tangentes aux deux courbes soient orthogonales.

   (c) Avec EDtools et EDplot,tracer l'ensemble des solutions de (E).

   (d) En posant $t = \dfrac{y}{x}$ dans (E), trouver un paramétrage des solutions de (E).

   (e) Tracé sur une même figure les solutions de (E) et les courbes Γ_λ.

   Centrale O15-C916

70. Soient $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ une famille de $2n$ réels.On désigne par $\overrightarrow{u}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$,$\overrightarrow{w}$ celui de coordonnées $(y_1, \cdots, y_n)$, $\overrightarrow{v}$ celui de coordonnées $(1, \cdots, 1)$ et par E le sous-espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On désigne par A_i le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_i, y_i). Pour tout couple de réels (a, b) et $\Delta_{a,b}$ représente droite d'équation $y = ax + b$ et on pose $\Psi(a, b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$.
    (a) Montrer qu'il existe un unique couple (a_0, b_0) tel que $\Psi(a_0, b_0) = \min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \Psi(a, b)$.
    (b) Donner les équations permettant de déterminer (a_0, b_0).
    (c) Dans cette question $n = 5$; $x = (1, 2, 5, 7, 9)$ et $y = (1, 3, 4, 7, 10)$. Tracer sur un même graphe (commande : display) les points A_i et la droite Δ_{a_0,b_0}.
    (d) ...mêmes question avec changement de vecteurs x et y...

    Centrale O15-C917

71. Soit l' équation différentielle $y'' + (\lambda + x^2)y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
    (a) On cherche une solution de (E) sous la forme d'une série entière $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Donner une relation entre les coefficients $(a_n)_{n\geq 0}$.
    (b) Écrire un programme en *Maple* pour calculer ces coefficients . Expliciter a_k pour $0 \leq k \leq 6$.
    (c) Pour $\lambda \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, tracer la solution et $S_6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} a_k x^k$.

    Centrale O15-C919

72. Soit V un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ "modélisé" par une matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $n > 0$. Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $\dfrac{1}{{}^tVV} V\,{}^tV$.
    (a) Montrer que P_V est un projecteur orthogonal. En donner les espaces caractéristiques (image et noyau). En déduire F_V la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à $Vect(V)$.
    (b) Ecrire une procédure retournant cette matrice P_v à partir de V. Retrouver les caractéristiques de P_v à partir de cette procédure. Exemple avec $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
    (c) Soient $V_1, \cdots, V_p$ une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$ engendrant F. Donner la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur F. Ecrire une procédure $proj(L, p)$ prenant en arguments $L = [V_1, \cdots, V_p]$ et retournant un ensemble d'équations de F. Application avec $V_1 = (1, 1, 1, 0, 3)$, $V_2 = (1, 2, 0, 4, -1)$ et $V_3 = (1, -1, -3, 0, 1)$.

    Centrale O15-C920

73. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.
    (a) Tracer sur un même graphe S_n pour $n = 5 * j$, avec $j \in [\![1, 10]\!]$.
    (b) Soit f la somme de la série . Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer f'. 3
    (c) Tracer $x-> \dfrac{2}{\pi}x^\alpha$ et S_500 pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et trouver α tel que $f(x)$ équivaut en $+\infty$ à $\dfrac{2}{\pi}x^\alpha$ puis le montrer par le calcul.
    (d) trouver à l'aide de Maple une autre expression de f et calculer la série des $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

    Centrale O15-C921

74. On définit $\mathbb{R}_n[X]$ comme l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On s'intéresse à l'ensemble des polynômes $E_n[X]$ tel que pour tout P appartenant à $E_n[X]$, on a :

    $$P(X) = A_n X^2 n + A_{n-1}X^{2n-1} + A_{n-2}X^{2n-2} + \cdots + A_1 * X^{n+1} + A_* X^n + A_1 * X^{n-1} + \cdots + A_{n-1}X + A_n$$

    c'est-à dire des polynômes de degré au plus $2n$ tels que X^{2n-k} et X^k ont même coefficient pour tout k.
    (a) On s'intéresse d'abord au cas $n = 4$.

i. On pose $C = (1+X^8, X+X^7, X^2+X^6, X^3+X^5, X^4)$ Montrer que C est une base de $E_4[X]$.

ii. On pose $\Phi_n(P) = X^n P(X+1/X)$ pour tout P appartenant à $R_n[X]$. Calculer $\Phi_4(X^k)$ pour k allant de 0 à 4. Montrer que ces éléments appartiennent à $E_4[X]$. Les écrire dans la base C.

iii. Etablir que Φ_4 est un isomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $E_4[X]$.

iv. Ecrire la matrice M de Φ_4 dans les bases $B = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ et C .

v. Inverser M.

vi. On pose $Q = X^8 - 11X^6 - 10X^5 - 5X^4 - 10X^3 - 11X^2 + 1$. Montrer que Q appartient à $E_4[X]$. Trouver P l'antécédent de Q par Φ_4. Factoriser P. En déduire les racines de Q.

(b) Cas général : Pour n quelconque, montrer que pour tout P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, $\Phi_n(P)$ appartient à $E_n[X]$. Montrer que Φ_n est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $E_n[X]$.

(c) Questions bonus : Ecrire M dans le cas général. M est-elle diagonalisable ?

Centrale O15-C922

75. On appelle polynôme homogène de degré n une fonction de la forme : $H(x,y) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{n-i}$. On donne de plus $\Delta(f)(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(a) Montrer que H_n l'ensemble des polynômes homogènes de degré n est un sous.espace vectoriel de l ' ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension ?

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $h(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ soit solution de $\Delta h = 0$.

(c) Créer un programme qui prend en argument n , x , y ,a (où a est une liste) et qui retourne $F(x,y) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{n-i}$.

(d) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que pour $n = 12$ on ait : $\Delta F = 0$. Quelle est la dimension du sous-espace des polynômes homogènes de degré 12 solution de $\Delta h = 0$? Quelles autres observations peut-on faire ?

(e) mal rapportée...

Centrale O15-C923

76. (a) Calculer les dix premiers termes de la suite définie par $P_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} f^{(n)}(x)$ où $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

(b) Conjecturer les caractéristiques de cette suite et démontrer l'une de vos conjectures.

(c) Démontrer ou justifier sur plusieurs valeurs de n les égalités : $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_n'(x)$ et $P_n'(x) = -nP_{n-1}(x)$. Exprimer $P_n(0)$ pour tout n.

(d) En calculant $P_n''(x) - xP_n'(x)$, trouver une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par P_n.

(e) Montrer que $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Centrale O15-C924