1. I) Soit une suite de matrices carrées $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice M. Montrer que si, pour tout entier naturel k, M_k est non inversible, alors M est non inversible.

   II) Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t$.

   Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t$ si $x \neq 0$, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$. En déduire la valeur de I. (TPE) O16-214

2. I) Trouver une équation différentielle dont $y(x) = (\arctan x)^2$ soit solution. En déduire le développement en série entière de y.

   II) Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Étudier la réciproque. (TPE) O16-215

3. I) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer l'inverse de A carrée d'ordre n de coefficients $a_{i,i} = 1$, $a_{i+1,i} = -a$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

   II) Soit $a > 1$. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos(t)}\, \mathrm{d}t$ (on pourra poser $u = \tan \frac{t}{2}$).

   III) Donner un équivalent de $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$, puis le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$. (TPE) O16-216

4. I) Soit A une matrice réelle à n lignes et p colonnes de rang p.
   Montrer que ${}^tAA$ est inversible.

   II) Étudier la convergence de la série de Fourier de f, 2π-périodique, impaire, nulle aux points $n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) et telle que $\forall t \in]0, \pi[, f(t) = 1$.

   En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}\cdot$ (TPE) O16-217

5. Étudier la série $\sum \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+4}\right)$ (convergence, somme). On remarquera que $\dfrac{1}{n^2+3n+4} = \dfrac{(n+1)-(n+2)}{1-(n+1)(n+2)}$. (TPE * 09-Demon) O16-940

6. (a) Soit une suite de matrices carrées $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice M. Montrer que si, pour tout entier naturel k, M_k est non inversible, alors M est non inversible.

   (b) i. Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t$.

   ii. Soit $F(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t$ si $x \neq 0$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

   iii. En déduire la valeur de I.

   TPE-Bouh O16-941

7. (a) Soit $y(x) = (\arctan x)^2$.

   i. Trouver une équation différentielle dont y est solution.

   ii. En déduire le développement en série entière de y.

   (b) Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.
   Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.
   Etudier la réciproque.

   TPE-Guig O16-942

8. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer que la dérivée d'ordre n de f est de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ où P_n est une fonction polynôme de degré n. Déterminer les racines de P_n.

   (Indication : on pourra écrire $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{a}{x+i} + \dfrac{b}{x-i}$) . (TPE * 09-Demon) O16-943

9. Soit (E) : $(1+x^2)y'' - 6y = 0$. Déterminer les solutions polynomiales de cette équation puis la résoudre sur $[0, +\infty[$. . (TPE * 09-Demon) O16-944

10. $f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (x+y-z)^2 + z^2$. f admet-elle un minimum ? Le préciser. (Utiliser le fait que $f(x,y,z) = ||u(x,y,z) - v||^2$). (TPE * 09-Demon) O16-945

11. Résoudre $Z^{2n}=1$. Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis $\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} X^{2p}$.
    En déduire $\displaystyle\prod_{p=1}^{n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$. (TPE * 09-Demon) O16-946
12. Soit F, G deux sev de même dimension d'un même K-ev de dimension finie E. Montrer qu'il existe un sev H de tel que $F\oplus H = G\oplus H = E$. (On pourra faire une démonstration par récurrence). (TPE * 09-Demon) O16-947
13. $f\in\mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, F est un sev de E. Montrer que F est stable par f si et seulement si F est somme de sev d'espaces propres de f. (TPE * 09-Demon) O16-948
14. Nature de la conique d'équation $\dfrac{-7}{10}x^2+\dfrac{17}{10}y^2+\dfrac{9}{5}xy+x-7y+\dfrac{3}{2}=0$. (TPE * 09-Demon) O16-949
15. I) Trouver les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et vérifiant $f(x+y)=\mathrm{e}^x f(y)+\mathrm{e}^y f(x)$ (on pourra justifier la dérivabilité de f sur tout $\mathbb{R}$ en utilisant judicieusement la définition de la dérivabilité).
    II) Soit A, symétrique réelle et vérifiant $\forall X\in\mathbb{R}^n,\ {}^tXAX\geq 0$; montrer que pour toute matrice Ω, orthogonale, $|\mathrm{tr}(\Omega A)|\leq \mathrm{tr}A$. (TPE) O16-C293
16. I) Montrer que (u_n) définie par $u_0\in\mathbb{C}$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n+|u_n|)$, converge et donner sa limite.
    II) On munit $\mathbb{R}_2[X]$ de sa structure euclidienne canonique ; trouver $\inf\{\|X-P\|,\ P\in\mathbb{R}_2[X],\ P(1)=0\}$. (TPE) O16-C294
17. I) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\big(\cos(x-\frac{\pi}{4})\big)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\ln\cos x\mathrm{d}x$.
    En déduire la valeur de $I=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$.
    II) Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, montrer que $a\wedge(b\wedge c)=(a|c)b-(a|b)c$ (on pourra prendre une base dont l'un des vecteurs est colinéaire à a). Donner les éléments propres de $f: x\mapsto a\wedge x$. Reconnaître f. (TPE) O16-C295
18. I) Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, montrer que φ, telle que $\big(\varphi(u)|v\big)+\big(u|\varphi(v)\big)=0$ pour tous vecteurs u et v, est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique. Montrer qu'il existe $w\in\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(u)=w\wedge u$.
    II) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$ en utilisant des sommes de Riemann. (TPE) O16-C296
19. I) Donner un équivalent de $u_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2$.
    II) Soient E un espace vectoriel, $u\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que Φ, l'application de $\mathcal{L}(E)$ définie par $\Phi(v)=u\circ v$, est linéaire.
    Montrer que si λ est valeur propre de Φ, elle est aussi valeur propre de u. Montrer la réciproque.
    On note $E(\lambda,\Phi)$ le sous espace propre de Φ associé à la valeur propre λ et $E(\lambda,u)$ celui associé à la valeur propre λ de u.
    Montrer que $E(\lambda,\Phi)=\mathcal{L}\big(E,E(\lambda,u)\big)$.
    En déduire que Φ est diagonalisable si et seulement si u l'est. (TPE) O16-C297
20. I) Résoudre $x^2y''+axy'+by=0$.
    II) Soient a et b des réels strictement positifs.
    Montrer que $\dfrac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}$ est intégrable sur $]0,1]$.
    Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u$ converge.
    Montrer l'existence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\mathrm{d}x$ et la calculer. (TPE) O16-C298