1. I) Montrer que $\Phi : P \mapsto (X^2-1)P''(X) - 2nXP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, donner sa matrice dans la base canonique. Est-il diagonalisable ?

   II) Soit E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha$ (où α est une constante).
   Montrer que $\varphi(x,y) = (x+2y, x-2y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   Montrer que c'est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On pose $f(x,y) = F(x+2y, x-2y)$.
   Montrer que si $f \in E$, alors $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 4\alpha$ et en déduire E. (Petites Mines) O16-C312

2. I) Résoudre le système $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' = 2y_1 + 4y_2 - 2y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}$ (on pourra utiliser la calculatrice pour le calcul du polynôme caractéristique).

   II) Convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$. (Petites Mines) O16-C313

3. I) À quelle condition sur a, $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n > 3$, et $a \in \mathbb{R}$, est-elle diagonalisable ?

   Peut-elle être semblable à $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

   II) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 3} (3^x - 3.2^x - 2)^{\tan\frac{\pi x}{6}}$. (Petites Mines) O16-C314

4. Soit $M_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

   Montrer que $E = \{M_{(a,b,c)},\ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$. est un espace vectoriel stable par multiplication, et déterminer sa dimension.
   Caractériser les triangles ABC dont les sommets d'affixes a, b, c correspondent aux éléments inversibles de E. (Petites Mines) O16-C315

5. I) Soit E euclidien de dimension $n \geq 1$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique positif. Montrer que $\forall x \in E, (f(x)|x) \geq 0$.
   Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.
   Montrer que $m_{i,i} \geq 0$ pour tout $i \in [1,n]$ et que $\mathrm{tr}M \geq 0$.
   Soient A et B deux matrice symétriques réelles d'ordre n positives. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(DM)$, où D est une certaine matrice diagonale, et M une matrice symétrique positive.
   En déduire que $\mathrm{tr}(AB) \leq \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

   II) Pour $n \geq 2$, donner un développement limité de :
   $u_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}\sin(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ à la précision $o(\dfrac{1}{n\sqrt{n}})$.
   Quelle est la nature de la série de terme général u_n ? (Petites Mines) O16-C316

6. Convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^n}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx$? (Petites Mines 09 *-Demon) O16-960

7. Soit f , 2π périodique et impaire avec , pour $x \in]0,\pi]$, $f(x) = \pi - x$. f est-elle somme de sa série de Fourier ? La déterminer. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$. (Petites Mines 09 *-Demon) O16-961

8. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet 0 comme seule valeur propre. Montrer que $A^n = 0$. Calculer $\det(A + I_n)$. Soit B commutant avec A, calculer $\det(A + B)$. (Petites Mines 09 *-Demon) O16-962
9. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = M^5$ avec $tr(M) = n$. (Petites Mines 09 *-Demon) O16-963
10. I) Montrer qu'une matrice A carrée, d'ordre $n \geq 3$, vérifiant $A^n \neq 0$ et de trace nulle, est diagonalisable.

    II) Soit (u_n) vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$ où $0 < a < b$.

    Montrer, à l'aide de $\sum(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$, que (u_n) tend vers 0.

    Soit $v_n = n^a u_n$; trouver a tel que $\sum(\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ converge.

    En déduire qu'il existe A tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^{b-a}}\cdot$

    Étudier la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

    (Petites Mines) O16-225
11. I) Montrer qu'un endomorphisme f nilpotent, d'un espace E de dimension 3, vérifie $f^3 = 0$.

    Soit un endomorphisme f de E de dimension 3 vérifiant $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$; montrer que $\exists x \in E$, $(f^2(x), f(x), x)$ est une base de E.

    Montrer que $C = \{g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ et en donner la dimension.

    II) Montrer que $f_n(x) = \dfrac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

    On note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$; déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

    (Petites Mines) O16-226
12. I) Convergence de la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^\alpha}\cdot$

    II) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

    III) Résoudre le système $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 3z \\ y' = 3x + 2y + 3z \\ z' = 3x + 3y + 2z \end{cases}$.

    (Petites Mines) O16-227